

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

*СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ  
И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ*



ВЫПУСК  
2

ОБЪЕДИНЕННОЕ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР  
1934

---

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ  
И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

Р. Н. БОНЧКОВСКОГО и проф. И. И. ЧИСТЯКОВА

*ВЫПУСК ВТОРОЙ*

ОБЪЕДИНЕННОЕ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ и НОМОГРАФИИ  
Москва 1934 Ленинград

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Москва, Центр, Комсомольский пер., 6,  
ОНТИ. Главная редакция общетехнической  
литературы и монографий.

---

Редакция Р. Н. Бончковского. Оформление О. Н. Персияниновой.  
Корректурa И. П. Загрядскова. Наблюдала за выпуском О. И. Морозова.  
Сдано в производство 17/VIII 1934 г. Подписано к печати 17/XII 1934 г.  
Печ. листов 4<sup>3/4</sup>. Формат 62×94. Тираж 5000. Печ. вн. в листе 60000.  
Заказ № 201. ГТТИ № 141. Уполн. Главлита № В—15454.

---

# ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

## НЕКОТОРЫЕ УПРОЩЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ КВАДРАТНЫЕ РАДИКАЛЫ

П. И. Сапунов (Владимир)

Нахождение возможных корней иррационального уравнения сопровождается двумя моментами:

- 1) освобождением иррационального уравнения от радикалов и
- 2) решением получившегося рационального уравнения (резольвенты иррационального уравнения).

В тех случаях, когда иррациональное уравнение имеет три члена, из которых все или два представляют собой радикалы с неизвестным, а также в тех случаях, когда подрадикальные выражения суть линейные функции неизвестного, можно было бы предложить некоторое отступление от обычных приемов разрешения этих уравнений; это отступление значительно сократило бы ту громоздкость выкладок, которые приходится при этом проводить.

Целью настоящей статьи и является изложение этих упрощений.

### 1. ОСВОБОЖДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ОТ РАДИКАЛОВ

Рассмотрим трехчленное иррациональное уравнение вида:

$$\sqrt{A_1} \pm \sqrt{A_2} = \pm \sqrt{A_3}. \quad (1)$$

Возводя обе части уравнения (1) в квадрат, получим:

$$A_1 + A_2 \pm 2\sqrt{A_1 A_2} = A_3.$$

Переносим  $A_1 + A_2$  в правую часть и снова возводя в квадрат, получим:

$$4 A_1 A_2 = A_3^2 - 2 A_3 (A_1 + A_2) + (A_1 + A_2)^2,$$

или

$$(A_1 - A_2)^2 - 2 A_3 (A_1 + A_2) + A_3^2 = 0. \quad (2)$$

Формула (2) дает возможность освобождать иррациональное уравнение от радикалов сразу, что в некоторых частных случаях дает возможность получения резольвент, легче разрешающихся.

Примеры:

$$1. \sqrt{2714-x} - \sqrt{x+2490} = 2.$$

Формула (2) дает:

$$(224 - 2x)^2 = 8 \cdot 5204 - 16 = 41\,616,$$

откуда

$$224 - 2x = \pm 204,$$

т. е.

$$x_1 = 214; \quad x_2 = 10.$$

Обычное решение дает:

$$2714 - x + x + 2490 - 2\sqrt{(2714-x)(x+2490)} = 4,$$

$$5200 = 2\sqrt{(2714-x)(x+2490)},$$

$$(2714-x)(x+2490) = 6\,760\,000,$$

$$2714 - x^2 - 2490x + 2714 \cdot 2490 = 6\,760\,000,$$

$$x^2 - 224x + 2 \cdot 40 = 0,$$

$$x = 112 \pm \sqrt{12\,544 - 21 \cdot 40},$$

т. е.

$$x_1 = 214; \quad x_2 = 10.$$

2. (Задачник Шапошникова и Вальцова, задача № 5, гл. XIII).

$$\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2.$$

Формула (2) дает

$$144 - 8(32 - 2x) + 16 = 0,$$

откуда

$$9 - 16 + x + 1 = 0, \quad \text{или} \quad x = 6.$$

Обычное решение дает

$$22 - x + 10 - x - 2\sqrt{(22-x)(10-x)} = 4,$$

$$2\sqrt{(22-x)(10-x)} = 28 - 2x,$$

$$220 - 32x + x^2 = 196 - 28x + x^2,$$

откуда

$$x = 6.$$

$$3. \sqrt{17+5x} - \sqrt{19-5x} = 3.$$

Формула (2) дает:

$$(10x - 2)^2 = 18 \cdot 36 - 81 = 81 \cdot 7,$$

откуда

$$10x - 2 = \pm 9\sqrt{7}, \quad \text{или} \quad x = 0,2 \pm 0,9\sqrt{7}.$$

Обычное решение дает:

$$17 + 5x + 19 - 5x - 2\sqrt{(17+5x)(19-5x)} = 9,$$

$$2\sqrt{323 + 95x - 85x - 25x^2} = 27,$$

$$4(323 + 10x - 25x^2) = 729, \quad \text{или} \quad 100x^2 - 40x + 563 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{56\,700}}{100} = \frac{20 \pm 90\sqrt{7}}{100} = 0,2 \pm 0,9\sqrt{7}.$$

Таким образом в тех случаях, когда одно из выражений  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  не зависит от неизвестного, а другие два имеют коэффициентами при неизвестном числа, по абсолютному значению одинаковые, выгодность применения формулы (2) очевидна.

Формула (2) упрощает получение резольвенты и в тех случаях, когда  $A_1$  и  $A_2$  — нелинейные функции неизвестного.

Примеры:

$$4. \sqrt{2x^2 + 5x - 2} + \sqrt{2x^2 + 5x - 9} = 1.$$

По формуле (2) имеем:

$$49 - 2(4x^2 + 10x - 11) + 1 = 0,$$

откуда

$$2x^2 + 5x - 18 = 0,$$

т. е.

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -4\frac{1}{2}.$$

Применение формулы (2) даёт возможность легко обнаружить общего множителя всех членов уравнения, на который можно сократить уравнение, что при обычном способе освобождения от радикалов зачастую ускользает.

$$5. \sqrt{5x + 7} - \sqrt{4x + 3} = \sqrt{3x + 4}.$$

Формула (2) даёт:

$$(3x + 4)^2 - 2(3x + 4)(7x + 10) + (3x + 4)^2 = 0.$$

Сократив на  $3x + 4$ , отчего тернется корень  $x_1 = -\frac{4}{3}$ , получим:

$$3x + 4 - 14x - 20 + 3x + 4 = 0,$$

т. е.

$$8x = -12, \text{ или } x_2 = -\frac{3}{2}.$$

$$6. \sqrt{5x + 7} - \sqrt{3x + 1} = \sqrt{x + 3}.$$

Формула (2) даёт:

$$(2x + 6)^2 - 2(8x + 8)(x + 3) + (x + 3)^2 = 0.$$

Сокращая на  $x + 3$ , отчего теряется корень  $x_1 = -3$ , получим:

$$5x + 15 - 16x - 16 = 0,$$

т. е.

$$x_2 = -\frac{1}{11}.$$

$$7. \sqrt{2x^2 + 21x - 11} - \sqrt{2x^2 - 9x + 4} = \sqrt{18x - 9}.$$

Формула (2) даёт:

$$(30x - 15)^2 - 2(4x^2 + 12x - 7) \cdot 9(2x - 1) + 81(2x - 1)^2 = 0.$$

Сокращая на  $9(2x - 1)^2$ , отчего тернется корень  $x_1 = \frac{1}{2}$ , получим:

$$25 - 4x - 14 + 9 = 0,$$

т. е.

$$x_2 = 5.$$

## II. ВЫВОД ФОРМУЛ ДЛЯ СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ КОРНЕЙ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ИРРАЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВИДА:

$$\sqrt{a_1x + b_1} \pm \sqrt{a_2x + b_2} = \pm \sqrt{a_3x + b_3}. \quad (1)$$

Формула (2) § 1 даёт:

$$[(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)]^2 - 2(a_3x + b_3)[(a_1 + a_2)x + b_1 + b_2] + a_3^2x^2 + 2a_3b_3x + b_3^2 = 0. \quad (2)$$

Коэффициенты при  $x^2$  и  $x$  будут соответственно равны:

$$(a_1 - a_2)^2 - 2a_3(a_1 + a_2) + a_3^2, \quad (3)$$

$$2[(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) - b_3(a_1 + a_2) - a_3(b_1 + b_2) + a_3b_3]. \quad (4)$$

Тогда

$$x_1 + x_2 = -\frac{2[(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) - b_3(a_1 + a_2) - a_3(b_1 + b_2) + a_3b_3]}{(a_1 - a_2)^2 - 2a_3(a_1 + a_2) + a_3^2}. \quad (5)$$

В частном случае, когда  $a_3 = 0$ ,

$$x_1 + x_2 = \frac{2[b_3(a_1 + a_2) - (a_1 - a_2)(b_1 - b_2)]}{(a_1 - a_2)^2}. \quad (6)$$

Свободный член уравнения (2) § 2 будет равен:

$$(b_1 - b_2)^2 - 2b_3(b_1 + b_2) + b_3^2, \quad (7)$$

а следовательно,

$$x_1x_2 = \frac{(b_1 - b_2)^2 - 2b_3(b_1 + b_2) + b_3^2}{(a_1 - a_2)^2 - 2a_3(a_1 + a_2) + a_3^2}. \quad (8)$$

В частном случае, когда  $a_3 = 0$ ,

$$x_1x_2 = \frac{(b_1 - b_2)^2 - 2b_3(b_1 + b_2) + b_3^2}{(a_1 - a_2)^2}. \quad (9)$$

Из рассмотрения выведенных формул мы замечаем, что формулы для коэффициента при неизвестном во 2-й степени и свободного члена, а также формула (2) § 1 для освобождения иррационального уравнения от радикалов составляются по одному и тому же закону, а потому знание этого закона может несколько облегчить составление резольвенты иррационального уравнения.

Примеры:

8. Для составления резольвенты уравнения

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{7x-27} = \sqrt{3x+4}. \quad (10)$$

По формуле (2) § 1 имеем:

$$(5x-28)^2 - (6x+8)(9x-26) + (3x+4)^2 = 0. \quad (11)$$

Коэффициент при  $x^2$  по формуле (3) § 2:

$$25 - 6 \cdot 9 + 9 = -20.$$

Свободный член по формуле (7) § 2:

$$28^2 - 8 \cdot (-26) + 16 = 1008.$$

Для нахождения члена с неизвестным в 1-й степени, если не запоминать формулы (4), остается выписать из уравнения (11) только члены с неизвестным в 1-й степени, а именно:

$$-280x - 72x + 156x + 24x = -172x.$$

Резольвента примет вид:

$$-20x - 172x + 1008 = 0.$$

### III. РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВИДА:

$$\sqrt{a_1x + b_1} \pm \sqrt{a_2x + b_2} = \pm \sqrt{a_3x + b_3},$$

когда один из корней легко отыскивается догадкой.

Очень многие иррациональные уравнения указанного вида имеют одним из корней небольшое целое число, которое нетрудно найти простым соображением. Для отыскания второго корня достаточно воспользоваться формулой (8) § 2 для произведения корней, которую нетрудно запомнить.

Примеры

1. (Задачник Шапошникова и Вальцова, задача № 8).

Уравнение  $\sqrt{3x-3} + \sqrt{5x-19} = \sqrt{3x+4}$  имеет очевидный корень  $x_1 = 4$ .

По формуле (8) § 2 имеем:

$$4x_2 = \frac{16^2 - 8 \cdot (-22) + 16}{4 - 6 \cdot 8 + 9} = \frac{448}{-35} = -12,8,$$

т. е.

$$x_2 = -3,2.$$

2. (Задачник Шапошникова и Вальцова, задача № 4):

Уравнение

$$\sqrt{3x+4} + \sqrt{x+2} = 8$$

имеет очевидный корень  $x_1 = 7$ , а потому по формуле (8) § 2 имеем

$$7x_2 = \frac{4 - 128 \cdot 6 + 64^2}{4} = 1 - 32 \cdot 6 + 64 \cdot 16 = 833,$$

т. е.

$$x_2 = 119.$$

### IV. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ДРУГОЕ, ПРИВОДЯЩЕЕСЯ К РЕШЕНИЮ НЕПОЛНОГО КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

обращается в неполное, если положить

$$x = y + x_1, \tag{2}$$

где  $x_1$  — один из корней уравнения (1).

В самом деле, после подстановки получим:

$$ay^2 + (2ax_1 + b)y = 0.$$

На основании этого, если известен один из корней данного иррационального уравнения вида:

$$\sqrt{a_1x + b_1} \pm \sqrt{a_2x + b_2} = \pm \sqrt{a_3x + b_3},$$

то для нахождения второго корня можно ввести вспомогательное неизвестное, определяемое формулой (2) § 1, отчего пропадут члены, не содержащие неизвестного, и резольвента примет форму неполного квадратного уравнения, которое решить проще и скорее, чем полное.



Примеры:

9. (Задачник Шапошникова и Вальцова, задача № 8).

$$\sqrt{3x+4} - \sqrt{3x-3} = \sqrt{5x-19}.$$

Очевидный корень  $x_1 = 4$ ; полагая  $x = y + 4$ , получим:

$$\sqrt{3y+16} - \sqrt{3y+9} = \sqrt{5y+1}.$$

Формула (2) § 1 дает:

$$49 - (10y+2)(6y+25) + (5y+1)^2 = 0.$$

Пропуская свободные от неизвестного члены как взаимно уничтожающиеся, получим:

$$60y^2 + 12y + 250y - 25y^2 - 10y = 0,$$

или

$$35y^2 - 252y = 0,$$

откуда

$$y_1 = 0, \quad y_2 = -7,2;$$

следовательно,

$$x_2 = -3,2.$$

10. (Задачник Шапошникова и Вальцова, задача № 8bis).

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{7x-27} = \sqrt{3x+4}.$$

Очевидный корень  $x_1 = 4$ ; полагая  $x = y + 4$ , получим:

$$\sqrt{2y+9} + \sqrt{7y+1} = \sqrt{3y+16},$$

откуда по формуле (2) § 1

$$(5y-8)^2 - (6y+32)(9y+10) + (3y+16)^2 = 0,$$

или

$$25y^2 - 80y - 54y^2 - 288y - 60y + 9y^2 + 96y = 0,$$

или

$$20y^2 + 332y = 0,$$

откуда

$$y_1 = 0, \quad y_2 = -16,6;$$

следовательно,

$$x_2 = -12,6.$$

Обычный способ решения:

$$(5x-28)^2 - (6x+8)(9x-26) + (3x+4)^2 = 0,$$

$$25x^2 - 280x + 784 - 54x^2 - 72x + 156x + 208 + 9x^2 + 24x + 16 = 0,$$

$$20x^2 + 172x - 1008 = 0,$$

$$5x^2 + 43x - 252 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 4; \quad x_2 = -12,6.$$

$$11. \sqrt{17x+19} + \sqrt{31x+33} = \sqrt{101x+95}.$$

Очевидный корень  $x_1 = 1$ ; полагая  $x = y + 1$ , получим:

$$\sqrt{17y+36} + \sqrt{31y+64} = \sqrt{101y+196},$$

$$(14y+28)^2 - (202y+392)(48y+100) + (101y+196)^2 = 0,$$

$$196y^2 + 784y - 9696y^2 - 18816y - 20200y + 10201y^2 + 39592y = 0,$$

$$701y^2 + 1360y = 0,$$

откуда

$$y_1 = 0; \quad y_2 = -\frac{1360}{701};$$

следовательно,

$$x_2 = -\frac{659}{701}.$$

## ВЫВОД НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛ ТРИГОНОМЕТРИИ

Н. А. Колмогоров (Капланбек)

Существует много разных геометрических доказательств формул тригонометрии. Я имею в виду формулы сложения, вычитания, умножения и деления, а также формулы преобразования сумм и разностей в произведения.

Настоящая статья посвящена выводу некоторых из этих формул и имеет целью показать, что исходной фигурой при выводе может служить косоугольный треугольник с тремя проведенными в нем высотами, причем для вывода большинства формул достаточно проведения только лишь одной или двух высот.

При доказательстве формул я буду опираться на известные определения тригонометрических функций острого угла из прямоугольного треугольника.

Возьмем косоугольный треугольник  $ABC$ , проведем в нем три высоты и введем обычные обозначения сторон и высот (фиг. 1).

Как известно, площадь треугольника  $ABC$  равна:

$$S = \frac{1}{2} bh_b,$$

но

$$h_b = c \sin A,$$

следовательно,

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A,$$

с другой стороны,

$$S = \frac{1}{2} ah_a.$$

Из сравнения последних формул получаем:

$$bc \sin A = ah_a,$$

откуда

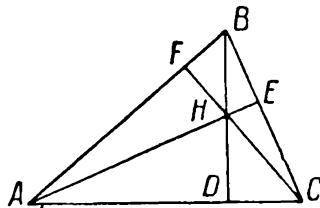
$$\sin A = \frac{ah_a}{bc}.$$

Последнее выражение примем за определение синуса угла  $A$  и будем в дальнейшем придерживаться именно этих определений синусов углов косоугольного треугольника.

Для углов  $B$  и  $C$  аналогично составим:

$$\sin B = \frac{bh_b}{ac}, \quad \sin C = \frac{ch_c}{ab}.$$

Если один из углов будет прямой, то эти выражения дадут обыч-



Фиг. 1;

ные определения тригонометрических функций из прямоугольного треугольника. Пусть, например,  $C = 90^\circ$ , тогда  $\sin C = 1$ , так как  $ch_c = ab$ ;  $\sin A = \frac{a}{c}$ ;  $\sin B = \frac{b}{c}$ .

Дадим теперь определение косинусов углов  $A$ ,  $B$  и  $C$  косоугольного треугольника. По обычному определению имеем:

$$\cos A = \frac{AD}{c},$$

но из подобия треугольников  $AHD$  и  $AEC$  находим:

$$\frac{AD}{AH} = \frac{h_a}{b},$$

откуда

$$AD = \frac{AH \cdot h_a}{b},$$

следовательно,

$$\cos A = \frac{AH \cdot h_a}{bc}.$$

Аналогично составим

$$\cos B = \frac{BH \cdot h_b}{ac}; \cos C = \frac{CH \cdot h_c}{ab}.$$

Если угол  $C$  — прямой, то  $\cos C = 0$ , так как  $CH = 0$ .

Из остальных тригонометрических функций рассмотрим еще определения тангенсов для углов  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

Тангенс угла  $A$  определим, как отношение синуса угла  $A$  к косинусу этого угла, т. е.

$$\operatorname{tg} A = \frac{ah_a}{bc}; \frac{AH \cdot h_a}{bc} = \frac{a}{AH};$$

аналогично получим:

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{BH}; \operatorname{tg} C = \frac{c}{CH}.$$

Мы видим, что при таком определении тангенсы углов косоугольного треугольника выражаются особенно просто. Если мы еще введем знаки для отрезков  $AH$ ,  $BH$  и  $CH$ , считая их положительными, если они имеют одинаковое направление от вершины треугольника с соответствующими высотами, и отрицательными, если они имеют направление, противоположное направлению соответствующих высот, то можно вышеуказанные определения считать справедливыми и для тупого угла. Для определенности будем считать высоты положительными и направленными от вершин к сторонам треугольника. Например, на фиг. 2 отрезки  $AH$  и  $BH$  имеют положительные направления, а отрезок  $CH$  — отрицательное, следовательно,

$$\sin A = +\frac{ah_a}{bc}; \cos A = +\frac{AH \cdot h_a}{bc}; \operatorname{tg} A = +\frac{a}{AH};$$

$$\sin B = +\frac{bh_b}{ac}; \cos B = +\frac{BH \cdot h_b}{ac}; \operatorname{tg} B = +\frac{b}{BH};$$

$$\sin C = +\frac{ch_c}{ab}; \cos C = -\frac{CH \cdot h_c}{ab}; \operatorname{tg} C = -\frac{c}{CH}.$$

Из вышеуказанных определений получаем теорему синусов в форме:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{bc}{h_a} = \frac{ac}{h_b} = \frac{ab}{h_c} = 2R,$$

и теорему косинусов в форме:

$$\frac{AH}{\cos A} = \frac{BH}{\cos B} = \frac{CH}{\cos C} = \frac{bc}{h_a} = \frac{ac}{h_b} = \frac{ab}{h_c} = 2R.$$

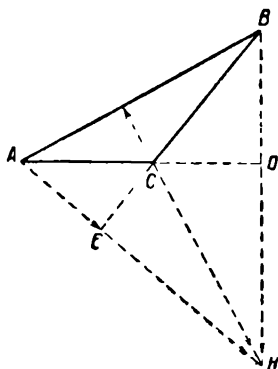
Последняя теорема в курсах тригонометрии не приводится в этом виде, а выражается, как известно, несколько иначе.

### ВЫВОД ФОРМУЛ СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ

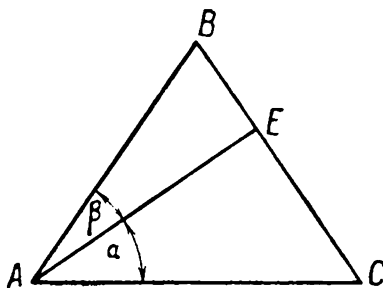
Вывод формулы:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Пусть даны углы  $\alpha$  и  $\beta$  (фиг. 3). Проведем через произвольную



Фиг. 2;



Фиг. 3.

точку  $E$ , лежащую на общей стороне углов  $\alpha$  и  $\beta$ , прямую  $BC \perp AE$ ; тогда имеем:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{CB \cdot AE}{AC \cdot AB},$$

но

$$BC = CE + BE,$$

следовательно,

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{(CE + BE) \cdot AE}{AB \cdot AC},$$

или

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{CE \cdot AE}{AC \cdot AB} + \frac{BE \cdot AE}{AB \cdot AC},$$

но

$$\frac{CE}{AC} = \sin \alpha; \quad \frac{AE}{AB} = \cos \beta; \quad \frac{BE}{AB} = \sin \beta; \quad \frac{AE}{AC} = \cos \alpha,$$

поэтому

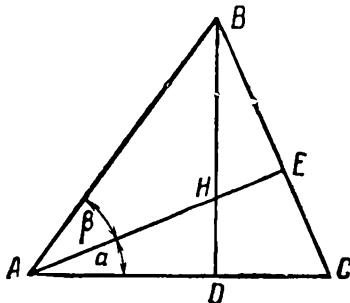
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha,$$

что и требовалось доказать.

Вывод формулы:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Сделаем тот же чертеж, но проведем еще одну высоту  $BD$  (фиг. 4), тогда получим:



Фиг. 4.

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{AH \cdot AE}{AB \cdot AC},$$

но

$$AH = AE - HE,$$

следовательно,

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{(AE - HE) \cdot AE}{AB \cdot AC},$$

или

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{AE \cdot AE}{AC \cdot AB} - \frac{HE \cdot AE}{AB \cdot AC};$$

но из подобия треугольников  $AEC$  и  $BHE$  имеем:

$$\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{HE},$$

или

$$HE \cdot AE = CE \cdot BE.$$

Подставив это выражение в предыдущее равенство, получим:

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{AE \cdot AE}{AC \cdot AB} - \frac{CE \cdot BE}{AC \cdot AB},$$

но

$$\frac{AE}{AC} = \cos \alpha; \quad \frac{AE}{AB} = \cos \beta;$$

$$\frac{CE}{AC} = \sin \alpha; \quad \frac{BE}{AB} = \sin \beta,$$

поэтому

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

что и требовалось доказать.

Вывод формулы:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Из того же чертежа (фиг. 4) имеем:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{BC}{AH} = \frac{CE + BE}{AE - HE},$$

но так как

$$HE \cdot AE = CE \cdot BE,$$

то

$$\frac{CE \cdot BE}{AE} = HE,$$

следовательно,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{CE + BE}{AE - \frac{CE \cdot BE}{AE}} = \frac{\frac{CE}{AE} + \frac{BE}{AE}}{1 - \frac{CE \cdot BE}{AE \cdot AE}},$$

или, сделав замену этих отношений их тригонометрическими обозначениями, получим:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

что и требовалось доказать.

Аналогично можно вывести и формулы вычитания:

$$\sin(\alpha - \beta), \cos(\alpha - \beta), \operatorname{tg}(\alpha - \beta),$$

причем новых линий в треугольнике проводить не понадобится.

Вывод формулы:

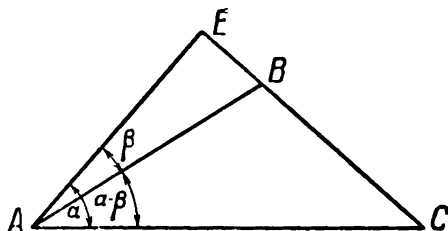
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha.$$

Пусть даны углы  $\alpha$  и  $\beta$ . Построим их разность  $\alpha - \beta$  (фиг. 5). Проведем  $BC \perp AE$ , тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \frac{BC \cdot AE}{AB \cdot AC} = \\ &= \frac{(CE - BE) \cdot AE}{AB \cdot AC}, \end{aligned}$$

или

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{CE \cdot AE}{AC \cdot AB} - \frac{BE \cdot AE}{AB \cdot AC},$$



Фиг. 5.

но

$$\frac{CE}{AC} = \sin \alpha; \quad \frac{AE}{AB} = \cos \beta; \quad \frac{BE}{AB} = \sin \beta; \quad \frac{AE}{AC} = \cos \alpha;$$

поэтому

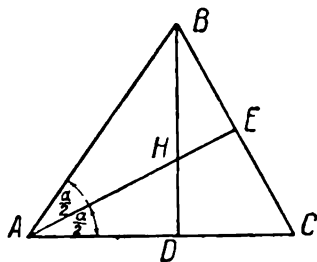
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha,$$

что и требовалось доказать.

Можно вывести и формулы умножения и деления. Остановимся на выводе формулы:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

Возьмем угол  $\alpha$ , разделим его пополам и проведем  $BC \perp AE$ , тогда  $AB = AC$  (фиг. 6). Из прямоугольного треугольника  $AEC$



Фиг. 6.

по теореме Пифагора имеем:

$$EC^2 = AC^2 - AE^2,$$

или

$$EC \cdot BE = AB \cdot AC - AE \cdot AE,$$

но

$$AE = AH + HE,$$

следовательно,

$$EC \cdot BE = AB \cdot AC - AE \cdot AH - AE \cdot HE,$$

а так как

$$AE \cdot HE = EC \cdot BE,$$

то

$$EC \cdot BE = AB \cdot AC - AE \cdot AH - EC \cdot BE,$$

или

$$2EC \cdot BE = AB \cdot AC - AE \cdot AH,$$

откуда

$$2 \frac{EC \cdot BE}{AC \cdot AB} = 1 - \frac{AE \cdot AH}{AB \cdot AC};$$

но

$$\frac{EC}{AC} = \frac{BE}{AB} = \sin \frac{\alpha}{2} \text{ и } \frac{AE \cdot AH}{AB \cdot AC} = \cos \alpha,$$

следовательно,

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha,$$

а отсюда

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}},$$

что и требовалось доказать.

Вывод формулы:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Пусть  $\alpha > \beta$ . Построим угол  $\alpha$  и отложим в нем угол  $\beta$ , как показано на фиг. 7. Далее, отложим  $AB = AD$  и проведем через точки  $B$  и  $D$  прямую  $BC$  до пересечения в точке  $C$  со стороной  $AC$ . Затем проводим биссектрису  $AE$  угла  $BAD$ . Так как треугольник  $BAD$  равнобедренный, то  $AE \perp BC$ . Нетрудно доказать, что

$$\angle CAE = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Действительно,

$$\angle BAD = \alpha - \beta,$$

а

$$\angle EAD = \frac{\alpha - \beta}{2},$$

следовательно,

$$\angle CAE = \beta + \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Составим выражения для  $\sin \alpha$  и  $\sin \beta$ :

$$\sin \alpha = \frac{BC \cdot AE}{AB \cdot AC};$$

$$\sin \beta = \frac{CD \cdot AE}{AD \cdot AC} = \frac{CD \cdot AE}{AB \cdot AC},$$

так как  $AD = AB$ .

Сложив  $\sin \alpha$  и  $\sin \beta$ , получим:

$$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{AE(BC + CD)}{AB \cdot AC},$$

но

$$BC = CE + DE,$$

и, если прибавим к обеим частям этого равенства по  $CD$ , то получим:

$$BC + CD = CE + DE + CD = 2CE,$$

следовательно,

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \frac{CE \cdot AE}{AC \cdot AB}.$$

Из чертежа видно, что

$$\frac{CE}{AC} = \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

и

$$\frac{AE}{AB} = \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

поэтому

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

что и требовалось доказать.

Так же просто можно вывести формулы:  $\sin \alpha - \sin \beta$ ;  $\cos \alpha \pm \cos \beta$  и  $\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta$ . Вывод последней формулы отличается особенной простотой. Пусть (фиг. 8)

$$\angle EAC = \alpha; \quad \angle EAB = \beta, \quad BC \perp AE.$$

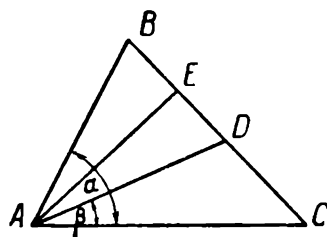
Тогда будем иметь:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CE}{AE};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{BE}{AE};$$

сложив эти равенства, получим:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{CE + BE}{AE} = \frac{BC}{AE}.$$



Фиг. 7.



Умножив оба члена последнего отношения на  $AE$ , а затем разделив их на произведение  $AC \cdot AB$ , получим:

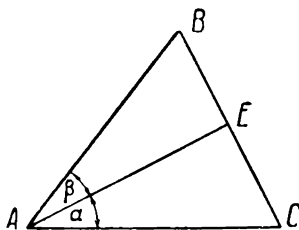
$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{BC \cdot AE}{AE \cdot AE} = \frac{\frac{BC \cdot AE}{AC \cdot AB}}{\frac{AE \cdot AE}{AC \cdot AB}} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta},$$

что и требовалось доказать.

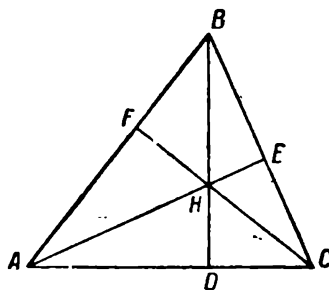
В заключение докажем следующую зависимость между отрезками  $AH$ ,  $BH$ ,  $CH$  и сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  треугольника  $ABC$ :

$$a \cdot BH \cdot CH + b \cdot CH \cdot AH + c \cdot AH \cdot BH = abc.$$

Проще всего можно доказать эту зависимость на основании



Фиг. 8



Фиг. 9.

следующих соображений. Пусть дан треугольник  $ABC$  (фиг. 9). Проведем в нем три высоты. Так как

$$A + B + C = 180^\circ,$$

то, как известно,

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C,$$

но

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} A &= \frac{a}{AH}; \\ \operatorname{tg} B &= \frac{b}{BH}; \\ \operatorname{tg} C &= \frac{c}{CH}. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в предыдущее равенство, получим сначала:

$$\frac{a}{AH} + \frac{b}{BH} + \frac{c}{CH} = \frac{abc}{AH \cdot BH \cdot CH},$$

а затем:

$$a \cdot BH \cdot CH + b \cdot CH \cdot AH + c \cdot AH \cdot BH = abc,$$

что и требовалось доказать.

# РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ СПОСОБОМ ВЫПРЯМЛЕНИЯ СТОРОН

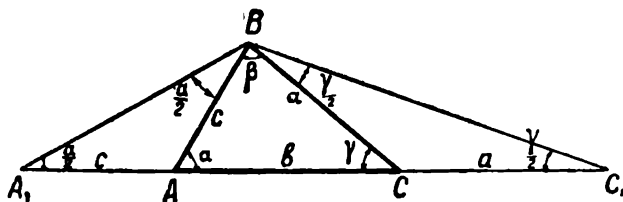
А. Д. Щербakov (Тула)

При решении треугольников в тех случаях, когда даются углы треугольника и сумма или разность сторон, можно с успехом пользоваться особым приемом, который мы назовем «способом полного или частичного выпрямления сторон». Этот прием состоит в том, что данный треугольник заменяется другим, одной из сторон которого является, в зависимости от условий, сумма или разность сторон данного треугольника.

Сущность этого приема лучше всего выявится на нижеследующих примерах:

1. Решить треугольник по данным углам  $\alpha$  и  $\gamma$  и периметру  $2p$ .

Пусть треугольник  $ABC$  есть тот, о котором говорится в задаче (фиг. 1).



Фиг. 1.

На прямой  $AC$  откладываем отрезки  $AA_1 = c$  и  $CC_1 = a$ . Тогда

$$A_1C_1 = 2p.$$

Из равнобедренных треугольников  $A_1AB$  и  $BCC_1$  имеем:

$$\angle BA_1C_1 = \angle ABA_1 = \frac{\alpha}{2},$$

$$\angle BC_1A_1 = \angle CBC_1 = \frac{\gamma}{2},$$

$$A_1B = 2c \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Кроме того,

$$\angle A_1BC_1 = \frac{\alpha}{2} + \beta + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Применяя теорему синусов к треугольнику  $A_1BC_1$ , получаем:

$$\frac{A_1B}{\sin(\angle BC_1A_1)} = \frac{A_1C_1}{\sin(\angle A_1BC_1)}, \quad \text{или} \quad \frac{2c \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{2p}{\sin\left(180^\circ - \frac{\alpha + \gamma}{2}\right)},$$

откуда

$$c = \frac{p \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma}{2}}.$$

Подобным же образом находятся другие стороны.

2. Решить треугольник по стороне  $a$ , сумме двух других сторон  $b \pm c$  и углу  $\alpha$ .

На прямой  $AC$  откладываем отрезок  $AA_1 = c$  и точку  $A_1$  соединяем с  $B$  (фиг. 2). Тогда

$$\angle BA_1C = \angle A_1BA = \frac{\alpha}{2}.$$

применяя теорему синусов к треугольнику  $A_1BC$ , получаем:

$$\frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{b+c}{\sin \left( \frac{\alpha}{2} + \beta \right)}.$$

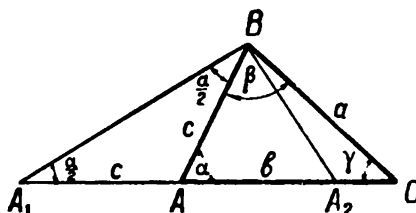
Но

$$\sin \left( \frac{\alpha}{2} + \beta \right) = \sin \left( 90^\circ - \frac{\gamma - \beta}{2} \right) = \cos \frac{\beta - \gamma}{2},$$

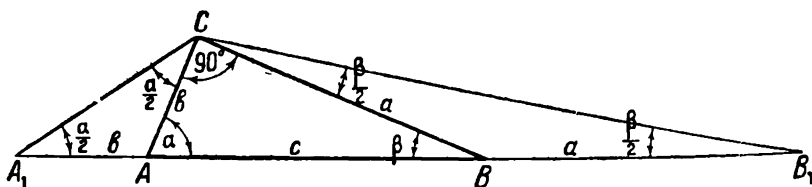
откуда

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Это есть известная первая формула Мольвейде.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Несколько изменив построение ( $AA_2 = c$ ) и применяя теорему синусов к треугольнику  $A_2BC$ , получаем (фиг. 2):

$$\angle BA_2C = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}; \quad \angle CBA_2 = \beta + \frac{\alpha}{2} - 90^\circ$$

и

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\sin \left( \beta + \frac{\alpha}{2} - 90^\circ \right)}{\sin \left( 90^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{\sin \frac{\beta - \gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Это есть вторая формула Мольвейде. Дальнейший ход решения треугольника общеизвестен.

3. Решить прямоугольный треугольник, зная его периметр  $2p$  и длину  $h$  перпендикуляра, опущенного из вершины с прямого угла на гипотенузу.

На прямой  $AB$  откладываем отрезки  $AA_1 = b$  и  $BB_1 = a$  (фиг. 3). Тогда

$$\begin{aligned}\angle CA_1B_1 &= \angle A_1CA = \frac{\alpha}{2}, \\ \angle CB_1A_1 &= \angle B_1CB = \frac{\beta}{2}, \\ \angle A_1CB_1 &= \frac{\alpha}{2} + 90^\circ + \frac{\beta}{2} = 135^\circ, \\ CB_1 &= \frac{h}{\sin \frac{\beta}{2}}.\end{aligned}$$

И, применяя теорему синусов к треугольнику  $A_1CB_1$ , получаем:

$$\frac{h}{\sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2p}{\sin 135^\circ}.$$

Но

$$2 \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\beta - \alpha}{2} - \cos 45^\circ,$$

следовательно,

$$\frac{h}{\cos \frac{\beta - \alpha}{2} - \cos 45^\circ} = \frac{p}{\sin 45^\circ},$$

или

$$\cos \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{h \sin 45^\circ}{p} + \cos 45^\circ = \frac{h + p}{p\sqrt{2}};$$

присоединив сюда уравнение

$$\alpha + \beta = 90^\circ,$$

углы  $\alpha$  и  $\beta$  легко найти.

Подобных задач можно привести сколько угодно; все они легко решаются способом выпрямления.

## ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ХУЗЕЛЯ

Н. А. Колмогоров (Капланбек)

С введением нового определения медиан многоугольников<sup>1)</sup> можно многие теоремы, связанные с медианами и с центром медиан треугольника, распространить и на многоугольники. В качестве примера приведу здесь обобщение теоремы Хузея (Housel) для описанного четырехугольника.

<sup>1)</sup> См. «Математическое образование» за 1928 год, № 5, мою статью «О медианах и о центре медиан многоугольников»\*.

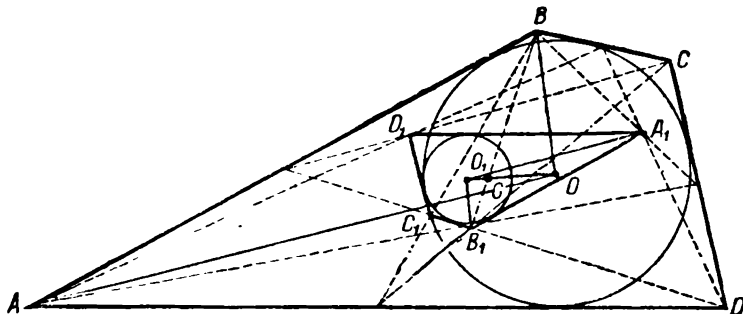
\* В статье «О медианах и о центре медиан многоугольника» Н. А. Колмогоров дает следующее определение медиан четырехугольника:

Медианой четырехугольника называется прямая, соединяющая какую-нибудь из его вершин с центром медиан треугольника (основание медианы четырехугольника), вершинами которого будут служить остальные три вершины четырехугольника. Все четыре медианы четырехугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 3:1 (эту точку называют центром медиан четырехугольника). (Продолж. см. на сл. стр.)

Оно выражается так: *Центр медиан описанного многоугольника, в частности четырехугольника, центр круга вписанного в него и центр круга вписанного в дополнительный многоугольник, лежат на одной прямой.*

Докажем эту теорему для описанного четырехугольника.

Пусть дан четырехугольник  $ABCD$ . Обозначим через  $O$  и  $O_1$  центры кругов, вписанных в четырехугольник  $ABCD$  и в дополнительный для него четырехугольник  $A_1B_1C_1D_1$ , и через  $\xi$  — пересече-



Фиг. 1

ние медианы  $BB_1$  четырехугольника  $ABCD$  с  $OO_1$  (фиг. 1). Далее, соединим  $B$  с  $O$  и  $B_1$  с  $O_1$  и рассмотрим треугольники  $OB\xi$  и  $O_1B_1\xi$ . Они будут подобны, так как  $BO \parallel B_1O_1$ . Из подобия их следует, что

$$\frac{B\xi}{B_1\xi} = \frac{O\xi}{O_1\xi} = \frac{BO}{B_1O_1}.$$

Рассмотрим теперь треугольники  $AOB$  и  $A_1O_1B_1$ . Они будут тоже подобны, так как стороны их соответственно параллельны. Из подобия их следует, что

$$\frac{BO}{B_1O_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = 3,$$

следовательно,

$$B\xi = 3B_1\xi,$$

т. е. точка  $\xi$  делит медиану  $BB_1$  четырехугольника  $ABCD$  в отношении 3 : 1, а потому эта точка  $\xi$  — центр медиан четырехугольника, а так как она лежит на прямой  $OO_1$ , то теорема доказана.

Легко распространить эту теорему на какой угодно описанный многоугольник.

Четырехугольник, вершинами которого служат основания медиан данного четырехугольника, называется дополнительным для данного четырехугольника. Эти два четырехугольника гомологичны и гомотетичны, причем центром гомологии и гомотетии служит центр медиан данного четырехугольника.

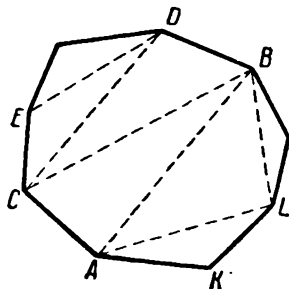
Вообще медианой  $n$ -угольника он называет прямую, соединяющую какую-нибудь из его вершин с центром медиан  $(n-1)$ -угольника (основание медианы  $n$ -угольника), вершинами которого служат остальные  $(n-1)$  вершины  $n$ -угольника. Все  $n$  медиан  $n$ -угольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении  $(n-1) : 1$ . Эта точка называется центром медиан  $n$ -угольника.  $n$ -угольник, вершинами которого служат основания медиан данного  $n$ -угольника, называется дополнительным к данному  $n$ -угольнику. (Прим. ред).

РАЗБИЕНИЕ ВЫПУКЛОГО МНОГОУГОЛЬНИКА НА  
ТРЕУГОЛЬНИКИ С ПОМОЩЬЮ ДИАГОНАЛЕЙ

С. А. Богомолов (Ленинград)

Рассматривая указанные разложения многоугольника, предполагают, что диагонали, производящие разложение, не должны непременно все исходить из одной и той же вершины (фиг. 1); треугольники не должны налегать друг на друга и вершины их должны находиться в вершинах данного многоугольника. Постановка вопроса о числе таких разбиений принадлежит еще Эйлеру, равно как и возвратная формула, решающая этот вопрос. В первой половине XIX в. ряд математиков дал различные подходы к решению указанной задачи; назову здесь Сегнера, Каталана, Бинэ, Ламэ. Ниже будет изложено решение последнего, которое он сообщил в письме к Лиувиллю<sup>1)</sup>; но сначала я установлю некоторые предварительные предложения.

Прежде всего возникает вопрос вообще о числе треугольников, на которые разлагается данный выпуклый  $n$ -угольник с помощью диагоналей; обозначим это число через  $T_n$  (не предпрешая вопроса о его зависимости от способа разложения). Для того чтобы найти  $T_n$ , докажем сначала, что при всяком разбиении получаются, по крайней мере, два таких треугольника, что у каждого из них две стороны будут сторонами данного многоугольника; при доказательстве будем иметь в виду фиг. 1. Пусть одна из диагоналей, производящих рассматриваемое разбиение, проходит через вершину  $A$ ; выпуклый многоугольник делится ею на две части, которые являются тоже выпуклыми многоугольниками, но с меньшим числом сторон. Если одна из этих частей — треугольник, то теорема доказана; если же этого нет, то остановимся дальше на одном из двух частичных многоугольников. Пусть в нем проведена диагональ, исходящая из вершины  $B$ ; снова возможны два случая: или она отделяет требуемый треугольник, или делит наш частичный многоугольник на две новых части. В последнем случае возьмем ту из них, которая кроме сторон данного многоугольника содержит лишь одну диагональ, и т. д. Так как число сторон первоначального многоугольника, входящих в состав частичного, постоянно уменьшается, то ясно, что, в конце концов, мы придем к искомому треугольнику. Такое же рассуждение применимо и к другой части (из первых двух) данного многоугольника. Теперь обращаемся к числу  $T_n$ . Каким бы способом данный  $n$ -угольник ни был разложен на части, всегда найдется такой частичный треугольник,



Фиг. 1.

<sup>1)</sup> «Journal de math. pures et appl.», t. III, 1838.

у которого две стороны будут сторонами многоугольника (например  $\triangle AKL$  на фиг. 1); по отделении этого треугольника дело сведется к разбиению  $(n-1)$ -угольника. Таким образом получаем:

$$T_n = T_{n-1} + 1, \quad (1)$$

и это — независимо от способа разбиения.

Легко видеть, что

$$T_4 = 2,$$

$$T_5 = 3;$$

отсюда выводится закон:

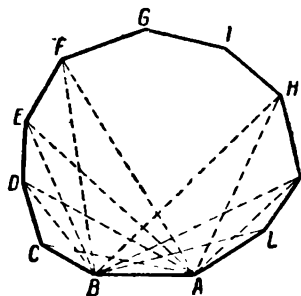
$$T_n = n - 2, \quad (2)$$

и формула (1) показывает, что если он верен для  $(n-1)$ , то он верен и для  $n$ . Следовательно, формула (2) верна всегда.

Теперь определим число диагоналей, потребных для разбиения  $n$ -угольника на  $(n-2)$  треугольника. Всех сторон у этих треугольников будет  $(3n-6)$ ; из них  $n$  приходится на долю сторон данного многоугольника (каждая из них входит в состав только одного треугольника). Таким образом на долю диагоналей остается  $(2n-6)$ ; но каждая диагональ является общей стороной для двух треугольников, так что число их оказывается равным:

$$n - 3.$$

После этих подготовительных предложений обратимся к основному вопросу и обозначим через  $P_n$  число различных способов, которыми можно разбить  $n$ -угольник на треугольники с помощью диагоналей.



Фиг. 2.

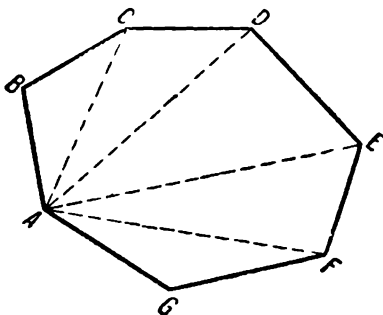
Возьмем какой-нибудь выпуклый  $(n+1)$ -угольник  $ABCDE\dots$  (фиг. 2); как бы мы ни разбили его на треугольники, сторона  $AB$  будет стороной одного из частичных треугольников, но его третья вершина может находиться в любой из вершин данного многоугольника (за исключением, конечно,  $A$  и  $B$ ). Если она находится в точке  $C$ , то по выделении  $\triangle CBA$  останется разложить на треугольники  $n$ -угольник  $ACDEF\dots$ , и таких раз-

ложений будет  $P_n$ . Если третья вершина треугольника с основанием  $AB$  лежит в точке  $D$ , то по выделении  $\triangle DBA$ , придется  $\triangle BCD$  сочетать с каждым разложением  $(n-1)$ -угольника  $ADEFG\dots$ , так что всего получится  $P_3 \cdot P_{n-1}$  разложений ( $P_3 = 1$ ). Точно так же  $\triangle EBA$  войдет в  $P_4 \cdot P_{n-2}$  разложений, ибо каждое разложение четырехугольника  $BCDE$  можно сочетать с каждым разложением  $(n-2)$ -угольника  $ADEFG\dots$  и т. д.

Складывая эти числа, получим первое основное соотношение:

$$P_{n+1} = P_n + P_3 \cdot P_{n-1} + P_4 \cdot P_{n-2} + \dots + P_{n-1} \cdot P_3 + P_n. \quad (3)$$

Возьмем теперь  $n$ -угольник  $ABCDE\dots$  (фиг. 3) и проведем все его  $(n-3)$  диагонали из вершины  $A$ . Легко видеть, что диагональ  $AC$  войдет во столько разложений, сколько их получится путем сочетания  $\triangle ABC$  с любым разложением  $(n-1)$ -угольника  $ACDE\dots$ , т. е.  $P_3 \cdot P_{n-1}$  разложений. Точно так же диагональ  $AD$  войдет во столько разложений, сколько существует комбинаций из разложений четырехугольника  $ABCD$  и  $(n-2)$ -угольника  $ADEF\dots$ , т. е. в  $P_4 \cdot P_{n-2}$  разложений, и т. д. Но полученные таким путем разложения, во-первых, не обнимают всевозможных разложений данного  $n$ -угольника (например, сюда не войдут разложения, содержащие  $\triangle ABC$ ), а во-вторых, не все отличны друг от друга: так, например, разложение, соответствующее диагонали  $AC$ , может содержать и диагональ  $AD$ , и наоборот. Сделаем для всех вершин то же самое, что мы сделали сейчас для вершины  $A$ , и сложим полученные числа разложений; сумма будет равна:



Фиг. 3.

$$n \cdot (P_3 \cdot P_{n-1} + P_4 \cdot P_{n-2} + \dots + P_{n-1} \cdot P_3). \quad (4)$$

Сюда, несомненно, войдет каждое из  $P_n$  разложений нашего  $n$ -угольника, и притом по несколько раз; вопрос состоит в том, сколько именно раз повторится каждое разложение в общей сумме (4).

Как мы знаем, каждое разложение содержит  $(n-3)$  диагонали; каждая диагональ имеет свои концы в вершинах многоугольника, и рассматриваемое разложение войдет в группу каждой вершины, служащей концом одной из указанных диагоналей; следовательно, в общей сумме оно повторится  $(2n-6)$  раз (совпадение некоторых концов диагоналей не нарушит правильности этого счета, так как данное разложение придется отдельно считать для каждой диагонали, исходящей из общего конца).

Таким образом получается второе основное соотношение:

$$(2n-6) \cdot P_n = n \cdot (P_3 \cdot P_{n-1} + P_4 \cdot P_{n-2} + \dots + P_{n-1} \cdot P_3). \quad (5)$$

Сопоставляя (3) и (5), находим:

$$(2n-6) \cdot P_n = n \cdot (P_{n+1} - 2P_n),$$

откуда

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} \cdot P_n. \quad (6)$$

Это и есть формула Эйлера.

Выражая  $P_n$  через  $P_{n-1}$ ,  $P_{n-1}$  через  $P_{n-2}$  и т. д., из этой обратной зависимости можно вывести следующую формулу, непосредственно выражающую  $P_{n+1}$  через  $n$ :

$$P_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-5)(2n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)n} \cdot 2^{n-1}. \quad (7)$$



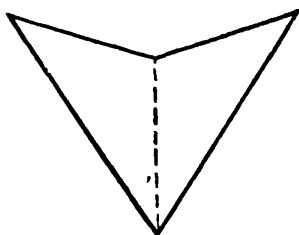
Отсюда для первых значений  $n$  имеем:

$$P_3 = 1; P_4 = 2; P_5 = 5; P_6 = 14; P_7 = 42;$$

$$P_8 = 135; P_9 = 429 \text{ и т. д.}$$

Интересно отметить, что при  $n = 20$  получается уже очень большое число:

$$P_{20} = 469\,925\,500$$



Фиг. 4.

(до этого числа вычисления довел Сегнер).

Формулы (6) и (7) выведены для выпуклых многоугольников, а для вогнутых они не имеют места; так, фиг. 4 ясно показывает, что вогнутый четырехугольник разлагается на треугольники с помощью диагонали одним единственным способом, тогда как для выпуклого имеются два различных разложения.

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ $n$ -ЗНАЧНЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ АСИММЕТРИЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

С. Е. Аршон (Москва)

1. Под  $n$ -значной *последовательностью* я разумею последовательность знаков, среди которых только  $n$  различных. В этом смысле последовательность

1 2 2 1 3 2

будет трехзначной, ибо она составлена из трех различных знаков, а именно: 1, 2 и 3. (В дальнейшем эти  $n$  различных знаков, из которых составлена  $n$ -значная последовательность, будем называть системой образующих или просто образующими.)

2.  $i$  каких-либо *последовательных* знаков данной  $n$ -значной последовательности образуют ее *часть*. Так, например, из указанной выше последовательности можно выделить части: 122; 213; 32 и т. д. (Очевидно, что и отдельный знак последовательности будет ее частью.)

3. Если в последовательности существует часть из  $2k$  знаков (где  $k = 1, 2, 3, \dots, \infty$ ), которая может быть разбита на две части, одинаковые как по знакам, так и порядку их следования, то такую часть (из  $2k$  знаков) мы будем называть *повторением*, а о последовательности будем говорить, что оно содержит повторение.

Так, например,

1 2 | 3 1 2 1 | 3 1 2 1 | 1 2 3 1

будет, очевидно, последовательностью с повторением. (Часть, являющаяся повторением, подчеркнута.) В «повторении» мы будем различать его *левую часть* (первые  $k$  знаков) и *правую часть* (последующие  $k$  знаков).

4.  $n$ -значную последовательность, не содержащую повторений, будем называть *асимметричной*. Так, например, последовательность

0 1 2 0 2 1 2 0 1 2 1 0 2 0 1 0 2 1 2 0 1 2 1 0 1 2 0

будет асимметричной, так как в ней нет повторений.

5. Вопрос о возможности или невозможности существования бесконечной,  $n$ -значной, асимметричной последовательности был в качестве проблемы поставлен проф. А. Я. Хинчиным на научной конференции НИИММ в январе 1933 г. Для случая  $n < 3$  задача тривиальна: существование таких последовательностей невозможно. Для случая  $n \geq 3$  такие последовательности, как мне удалось доказать, существуют. Этому доказательству и одновременно методу построения таких последовательностей и посвящена эта работа.

6. Убедимся, во-первых, что для любого  $n$  существует такая асимметричная последовательность, которая *не может быть продолжена*, как асимметричная, иначе говоря, приписка к ней любого из образующих ее знаков создает в ней повторение. Докажем это методом индукции. Назовем такую последовательность *замкнутой* и обозначим символом  $A_n$ , где индекс  $n$  — ее значность. Очевидно, что при  $n = 1$   $A_1$  существует.

Положим теперь, что существует  $A_{n-1}$ , образованная из знаков  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$ . Тогда, как легко убедиться, последовательность

$$A_{n-1} a_n A_{n-1},$$

образованная из  $A_{n-1}$  припиской справа нового знака  $a_n$  и следующей припиской  $A_{n-1}$ , будет  $n$ -значной, асимметричной и замкнутой.

Таким образом можем построить  $A_n$  для любого  $n$ . Например:

$$A_1 = 1$$

$$A_2 = 1 \ 2 \ 1$$

$$A_3 = 1 \ 2 \ 1 \ 3 \ 1 \ 2 \ 1$$

$$A_4 = 1 \ 2 \ 1 \ 3 \ 1 \ 2 \ 1 \ 4 \ 1 \ 2 \ 1 \ 3 \ 1 \ 2 \ 1^1)$$

Доказанное существование  $A_n$  указывает, что построение бесконечной  $n$ -значной асимметричной последовательности требует создания специального алгоритма. Это и будет моей задачей.

7. Пусть системой образующих будут знаки  $1, 2, 3, \dots, n$ . Условимся называть *звеном* любую перестановку из образующих и *цепью* — последовательность, образованную идущими последовательно друг за другом целыми звеньями.

8. Теперь, прежде чем излагать дальнейший ход исследования, я сознательно забегу вперед и покажу самый способ построения бесконечных асимметричных последовательностей. Разобрав этот

<sup>1)</sup> Очевидно, что конструируемая таким образом последовательность содержит  $2^n - 1$  знаков. Легко показать, что это будет минимум знаков для образования  $A_n$ .

способ, читатель сумеет значительно легче уяснить себе и самый ход исследования.

Для построения искомой последовательности я буду пользоваться следующими  $2n$  звеньями, деля их на четные и нечетные и соответственным образом нумеруя:

Нечетные звенья		Четные звенья	
1	1 2 3 ... $(n-1)$ $n$	1	$n (n-1)(n-2) \dots 2$ 1
2	2 3 4 ... $n$ 1	2	1 $n (n-1) \dots 3$ 2
3	3 4 5 ... 1 2	3	2 1 $n \dots 4$ 3
...	...	...	...
$n$	$n$ 1 2 ... $(n-2)(n-1)$	$n$	$(n-1)(n-2)(n-3) \dots 1$ $n$

Структура и нумерация звеньев ясны. При  $n=3$  я, следовательно, буду иметь такую систему звеньев:

Нечетные звенья		Четные звенья	
1	1 2 3	1	3 2 1
2	2 3 1	2	1 3 2
3	3 1 2	3	2 1 3

10. Рассматривая знаки первого нечетного звена как номера звеньев, развернем этот символ, заменяя в нем знаки, стоящие на нечетных местах, соответствующими нечетными звеньями, а знаки, стоящие на четных местах, — соответствующими четными звеньями. Полученную таким образом цепь назовем *первой единицей* и будем обозначать символом  $I_1$ .

Таким образом для  $n=3$  будем иметь:

$$I_1 = 1\ 2\ 3\ 1\ 3\ 2\ 3\ 1\ 2.$$

Проделаем теперь над цепью  $I_1$  такую же операцию, т. е. подставим вместо знаков соответствующие звенья. Назовем полученную цепь второй единицей, обозначив ее символом  $I_2$ .

Таким образом при  $n=3$  будем иметь:

$$I_2 = 1\ 2\ 3\ 1\ 3\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3\ 2\ 3\ 1\ 3\ 1\ 2\ 1\ 3\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3\ 2\ 1\ 2\ 3\ 1.$$

11. Установим теперь правило:  $k$ -я единица ( $I_k$ ) образуется из  $(k-1)$ -й единицы ( $I_{k-1}$ ) по тому же закону, что и  $I_{k-1}$  из  $I_{k-2}$ , где  $k=0, 1, 2, \dots, \infty$ .

Разумея под  $I_0$  первое нечетное звено, я утверждаю:  $I_k$  при как угодно большом  $k$  будет асимметричной последовательностью.

12. Прежде чем переходить к доказательству высказанного утверждения, установим необходимые понятия, термины и обозначения. Мы будем различать понятия *последовательности знаков* и *совокупности знаков*. Когда нам задана последовательность знаков, то это значит, что нам указаны не только знаки, но и порядок их следования. Когда же мы говорим о совокупности знаков, то разумеем лишь самые знаки независимо от порядка их следования. Мы будем говорить, что две совокупности  $A$  и  $B$  *равны*, если каждому знаку в  $A$  имеется одинаковый знак в  $B$ , и обратно.

13. С этой точки зрения все  $n!$  возможных звеньев (§ 7) будут различны, если их рассматривать как последовательности, и *равны*, если их рассматривать как совокупности. Поэтому в дальнейшем, рассматривая звенья как совокупности знаков, мы будем любое из них обозначать постоянным символом  $N$ .

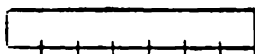
14. В процессе доказательства асимметричности  $I_n$  мы будем прибегать к разбиению звеньев на части. Условимся, что *под частью звена мы всегда будем понимать совокупность, но отнюдь не последовательность*.

15. Из определения звена (§ 7) следует, что оно есть совокупность  $n$  различных знаков, и, значит, при разбиении звена на части эти части *не могут иметь одинаковых знаков*.

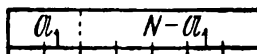
16. Из рассмотрения звена как совокупности ( $N$ ) следует: если из какого-либо звена выделена часть  $\mathfrak{A}_1$ , то остающиеся знаки звена образуют совокупность ( $N - \mathfrak{A}_1$ ). Обратно: если известно, что звено содержит совокупность знаков ( $N - \mathfrak{A}_1$ ), то, значит, остальные знаки звена образуют совокупность  $\mathfrak{A}_1$ .

17. Будем различать знаки звена по их порядку, разумая под *порядком звенового знака* номер места, которое он занимает в звене, считая слева. Так, например, в звене 312 знак 3 — первого порядка, знак 1 — второго порядка, знак 2 — третьего порядка. Очевидно, что порядок звенового знака в  $n$ -значной цепи может колебаться лишь в пределах от единицы до  $n$ , так как каждое звено состоит из  $n$  знаков.

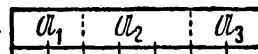
18. Звено будет схематически изображаться прямоугольником, как показано на фиг. 1.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

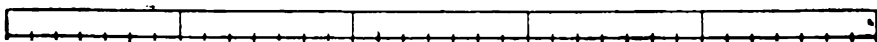
Фиг. 2 будет означать, что в данном звене  $N$  выделена часть  $\mathfrak{A}_1$ . Пунктир отделяет знаки части  $\mathfrak{A}_1$  от знаков части ( $N - \mathfrak{A}_1$ ). Фиг. 3 означает, что в данном звене различаются три части:  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ .

19. Цепь будет схематически изображаться так, как показано на фиг. 4.

Здесь прямоугольники суть последовательные целые звенья. Если цепь содержит «повторение», то схематически это будет изображаться, как показано на фиг. 4а.

20. В «повторении», изображенном на фиг. 4а, мы будем различать следующие элементы:

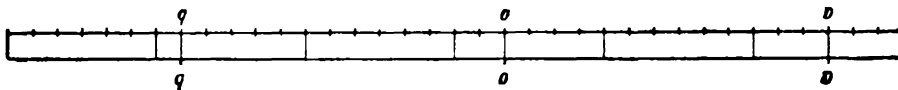
Границы повторения. Они изображены вертикалями  $aa$  и  $bb$ . Это значит, что знаки цепи, находящиеся между этими границами, составляют повторение (§ 3).



Фиг. 4.

Левая и правая части повторения. Они отделены вертикалью  $oo$ . Это значит, что знаки цепи между  $aa$  и  $oo$  составляют левую часть повторения, а знаки цепи между  $oo$  и  $bb$  — правую часть повторения (§ 3).

Звено  $aa$ . Это звено, через которое проходит ось  $aa$ . Этой осью оно делится на *левую* и *правую* части.



Фиг. 4а.

Звено  $oo$ . Это звено, через которое проходит ось  $oo$ . Этой осью оно делится на *левую* и *правую* части.

21. Кроме введенных терминов установим одно *основное понятие*, именно *характер повторения*. Характер повторения определяется четырьмя числами

$$u, u', j, j',$$

которые означают:

$u$ —	порядок	первого	знака	левой	части	повторения
$u'$ —	»	»	»	правой	»	»
$j$ —	»	последнего	»	левой	»	»
$j'$ —	»	»	»	правой	»	»

Очевидно, что в  $n$ -значной цепи значения  $u, u', j, j'$  могут колебаться лишь в пределах от 1 до  $n$ .

22. Пользуясь понятием характера повторения, все возможные повторения в цепи можно, очевидно, свести к следующим случаям:

- 1)  $u \geq u' > 1$ ,
- 2)  $u > u' = 1$ ,
- 3)  $u = u' > 1$ ,
- 4)  $u = u' = 1$ .

23. Те о р е м а I. Цепь не может содержать повторения, в котором

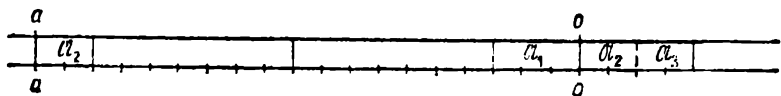
$$u \geq u' > 1.$$

Доказательство. Случай  $u > u'$ .

Здесь могут быть два варианта:  $j > j'$  или  $j < j'$  (вариант  $j = j'$  исключен, так как отсюда следовало бы  $u = u'$ , что противоречит условию теоремы).

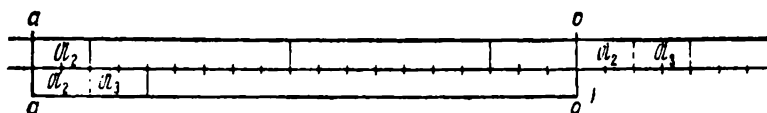
1-й вариант:  $j > j'$ .

Положим, что такое повторение существует (фиг. 5). Пусть правая часть звена  $aa$  (фиг. 5) будет  $\mathcal{U}_2$ . Так как мы имеем дело с повторением, то, следовательно, и в правой части звена  $oo$  должна заклю-



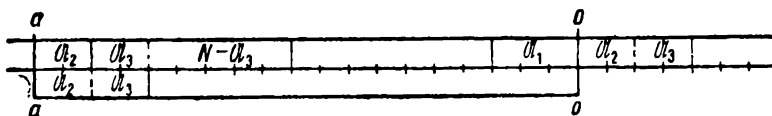
Фиг. 5.

чаться часть  $\mathcal{U}_2$ . Отделим ее и обозначим остальные части звена  $oo$ , как показано на фиг. 5, символами  $\mathcal{U}_1$  и  $\mathcal{U}_3$ . Подпишем теперь правую часть повторения под левой, как показано на фиг. 6.



Фиг. 6.

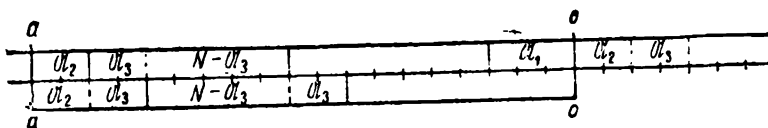
Из того, что левая и правая части повторения должны быть одинаковы по знакам и порядку их следования (§ 3), следует, что верхняя и нижняя (подписанная) строки на фиг. 6 должны пред-



Фиг. 7.

ставлять одну и ту же картину в смысле распределения и следования знаков.

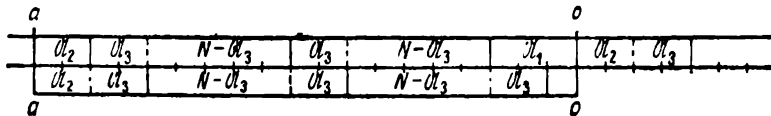
Но в таком случае из фиг. 6 следует, что в звене, следующем за звеном  $aa$ , должна быть часть  $\mathcal{U}_3$ , и, значит, наша схема должна иметь такой вид, как показано на фиг. 7 (§ 16). Но из фиг. 7, по сооб-



Фиг. 8.

ражениям, аналогичным предыдущим, следует, что наша схема должна иметь вид, как показано на фиг. 8.

Применяя этот метод рассуждения далее, мы придем к заключению, что наша схема должна иметь вид, как на фиг. 9. Но

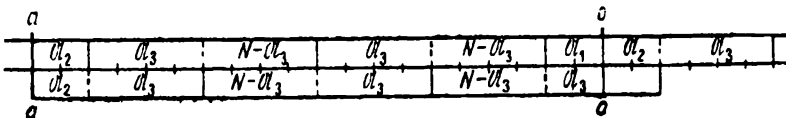


Фиг. 9.

в таком случае мы приходим к противоречию: получается, что в части  $U_1$  звена  $oo$  должны заключаться знаки части  $U_3$ , что (§ 15) невозможно.

2-й вариант:  $j < j'$ .

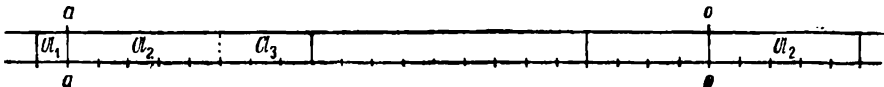
Рассуждения, аналогичные предыдущему, приводят к противоречию. Получается (фиг. 10), что часть  $U_1$  звена  $oo$  должна содержать (полностью или частично) знаки части  $U_3$ , что невозможно.



Фиг. 10.

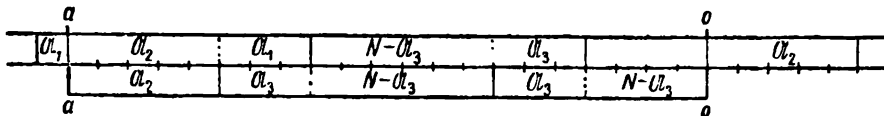
Случай  $u < u'$ : 1-й вариант:  $j < j'$ .

Пусть правая часть звена  $oo$  будет  $U_2$ . Следовательно, звено  $aa$  можно разбить на части, как показано на фиг. 11. Подписав те-



Фиг. 11.

перь, как и в предыдущем, правую часть повторения под левой, придем к выводу, что наша схема должна иметь вид, как показано на фиг. 12. Но в таком случае приходим к противоречию:



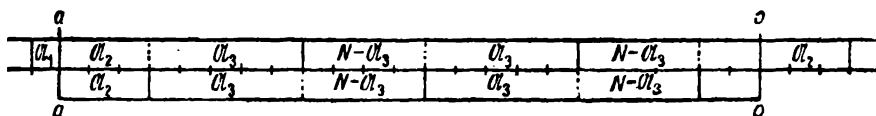
Фиг. 12.

получается, что звено  $oo$  не содержит знаков части  $U_3$ , что (§ 13) невозможно.

2-й вариант:  $j > j'$ .

Рассуждения, аналогичные предыдущему, приводят к выводу, что (фиг. 13) левая часть звена  $oo$  содержит часть  $N - U_3$ . Но из

разбиения звена  $aa$  следует, что  $N - \mathcal{U}_3 = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ , и, следовательно, как показывает фиг. 13, звено  $oo$  должно дважды содержать часть  $\mathcal{U}_3$ , что (§ 15) невозможно. Таким образом теорема доказана.



Фиг. 13.

**Замечание.** Заметим, что доказанная теорема не связана с алгоритмом построения  $I_k$  (§ 10) и, таким образом, обнаруживает общее свойство того типа последовательностей, которые мною названы цепями (§ 8).

24. Прежде чем продолжать доказательство дальше, вернемся к алгоритму построения  $I_k$ , с тем чтобы подчеркнуть некоторые его особенности и установить необходимые термины.

25. Два звена с одинаковыми номерами (§ 9), из которых одно четно, другое нечетно, будем называть *сопряженными*.

26. Обозначая в звене  $\alpha$  знак с порядком  $i$  (§ 17) через  $\alpha_i$ , замечаем, что из структуры звеньев (§ 9) следует:

- 1) Если в звеньях  $\alpha$  и  $\alpha'$  при каком-либо значении  $i$

$$\alpha_i = \alpha'_i; \quad \alpha_{i+1} = \alpha'_{i+1},$$

то звенья  $\alpha$  и  $\alpha'$  тождественны.

- 2) Если относительно звеньев  $\alpha$  и  $\alpha'$  известно, что:

а) одно из них четно, другое нечетно;

б) часть из  $i$  первых знаков звена  $\alpha$  равна (§ 12) части из  $i$  последних знаков звена  $\alpha'$  при  $i < n$ ,

то звенья  $\alpha$  и  $\alpha'$  сопряжены.

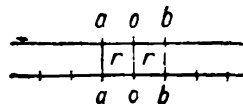
27. Из алгоритма построения  $I_k$  следует:

- 1) Из двух смежных звеньев  $I_k$  одно четно, другое нечетно.

2) Если  $I_k$   $p$ -е и  $q$ -е звенья тождественны или сопряжены, то  $p$ -й и  $q$ -й знаки в  $I_{k-1}$  одинаковы.

28. Лемма I. Если  $I_k$  содержит повторение из двух знаков, то в ней содержится два смежных сопряженных звена.

**Доказательство.** Положим, такое повторение существует (фиг. 14). Очевидно, оба знака  $r$  не могут принадлежать одному звену. Значит, ось  $oo$  — граница двух смежных звеньев  $\alpha$  и  $\alpha'$ . Из этих звеньев одно четно, другое нечетно (§ 27, п. 1) и вместе с тем  $\alpha^n = \alpha'_1$ , т. е. последний знак звена  $\alpha$  одинаков с первым знаком звена  $\alpha'$ . Но в таком случае эти звенья удовлетворяют условиям «а» и «б» § 26, и, значит, они сопряжены.



Фиг. 14.

29. Лемма II.  $I_k$  не может содержать двух смежных сопряженных звеньев.

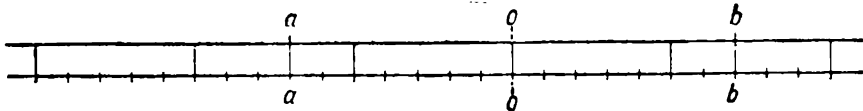


*Доказательство.* Предположим, что  $I_k$  содержит два таких звена. Тогда (§ 27, п. 2)  $I_{k-1}$  содержит повторение из двух знаков и, следовательно, по лемме I будет содержать два смежных сопряженных звена. Но в таком случае  $I_{k-2}$  содержит повторение из двух знаков. Продолжая так рассуждать далее (метод бесконечного спуска), мы придем к явно абсурдному выводу о наличии в звене двух одинаковых знаков, что и доказывает лемму.

30. Теорема II.  $I_k$  не может содержать повторения, в котором

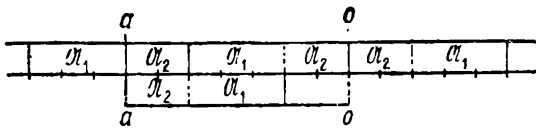
$$u > u' = 1.$$

*Доказательство.* Положим, такое повторение существует (фиг. 15). Пусть левая и правая части звена  $aa$  будут соответственно  $\mathcal{M}_1$  и  $\mathcal{M}_2$ . Тогда, рассуждая прежним способом, найдем, что звенья повторения разобьются на части  $\mathcal{M}_1$  и  $\mathcal{M}_2$ , как показано на фиг. 16.



Фиг. 15.

Рассмотрим полученный результат. Последнее звено левой части и первое звено правой части повторения смежны, и, значит (§ 27, п. 1) одно из них четно, а другое нечетно, т. е. они удовлетворяют условию 2, «а» § 26. Вместе с тем, как видно из фиг. 15, эти звенья удов-



Фиг. 16.

летворяют и условию «б» § 26. Значит, они сопряжены. Но это противоречит лемме I, что и доказывает теорему.

31. Следствие 1. Из теорем I и II следует:  $I_k$  не может содержать повторения, в котором  $u \geq u'$ , и, значит, если она может содержать повторение, то только такое (§ 22), в котором

$$u = u' > 1.$$

32. Лемма III. Если  $I_k$  содержит повторение, в котором  $u = u' > 1$ , то одновременно она должна содержать повторение, в котором  $u = u' = 1$ .

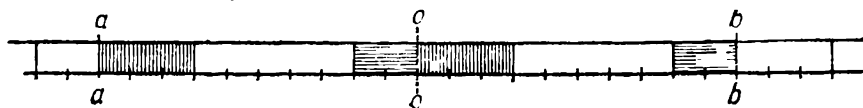
*Доказательство.* Пусть  $I_k$  содержит повторение, в котором  $u = u' > 1$ . Здесь могут быть два варианта:  $u = u' < n$  или  $u = u' = n$ . Рассмотрим каждый из них в отдельности.

1-й вариант:  $u = u' < n$ .

Положим, что фиг. 17 изображает предполагаемое повторение.

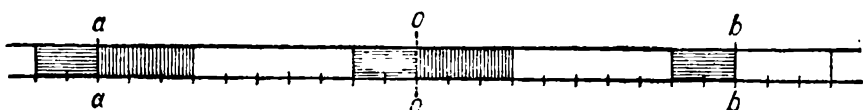
Из того, что  $u = u' < n$ , следует, что правые части звеньев  $aa$  и  $oo$  содержат более чем по одному знаку. Вместе с тем эти знаки

не только соответственно одинаковы, но и ( $u = u' < n$ ) одного порядка, и, значит (§ 26, п. 1), звенья  $aa$  и  $oo$  тождественны. Следо-



Фиг. 17.

вательно, цепь имеет вид, как показано на фиг. 18, где одинаково заштрихованные части одинаковы и по знакам, и по порядку их следования.

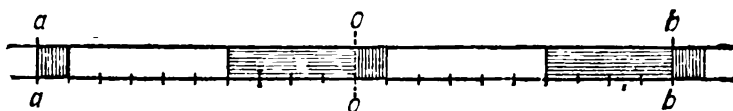


Фиг. 18.

Но в данном случае, сдвинув оси  $aa$ ,  $oo$ ,  $bb$  влево на длину, заштрихованную горизонтальными черточками, мы вновь получим повторение, для которого, очевидно,  $u = u' = 1$ .

2-й вариант:  $u = u' = n$ .

В этом случае (фиг. 19) части звеньев, заштрихованные горизонтально, содержат более чем по одному знаку ( $n \geq 3$ ), и, значит (§ 26, п. 1), эти звенья одинаковы, а поэтому повторение имеет вид, как показано на фиг. 19.



Фиг. 19.

Но в таком случае оси можно сдвинуть вправо на один знак (заштрихован вертикальными полосками), и мы вновь получим повторение, для которого  $u = u' = 1$ .

Таким образом теорема доказана.

33. *Замечание 1.* Повторение, в котором  $u = u' = 1$ , характерно тем, что левая и правая его части состоят, очевидно, из целых звеньев. Поэтому этот тип повторения можно назвать «повторением звеньев» в отличие от типа повторения  $u = u' > 1$ , которое можно назвать «повторением знаков».

34. Теорема III.  $I_k$  не может содержать повторений.

*Доказательство.* Предположим противное. В таком случае (лемма III) в ней содержится «повторение звеньев». Следовательно (§ 27, п. 2),  $I_{k-1}$  содержит «повторение знаков», а значит и (лемма III) «повторение звеньев». Рассуждая так далее, мы методом бесконечного спуска придем к очевидно абсурдному выводу о наличии повторения знаков в звене, что и доказывает теорему.

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

## ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Д. И. Перепелкин (Москва)

При изложении теории гиперболических функций всегда указывается их геометрическая интерпретация.

Функции

$$x = \operatorname{ch} t; \quad y = \operatorname{sh} t$$

представляют собою абсциссу и ординату точки, лежащей на равно-  
сторонней гиперболы

$$x^2 - y^2 = 1,$$

причем  $t$  обозначает площадь сектора этой гиперболы, вырезаемого радиусом-вектором рассматриваемой точки и радиусом-вектором точки, симметричной с данной относительно действительной оси гиперболы.

Это геометрическое толкование гиперболических функций обычно несколько не связывается с их теорией. Между тем, полная аналогия между геометрическим определением гиперболических функций и обычным определением тригонометрических функций выдвигает вопрос о возможности построения теории гиперболических функций чисто геометрическим путем, подобно тому как строится теория тригонометрических функций в тригонометрии.

Задачей настоящей статьи и является построение такого рода теории гиперболических функций. При этом в соответствии с поставленной задачей мы поставим еще добавочным условием пользование по возможности исключительно геометрическими методами.

Что касается литературы, то изложения теории гиперболических функций, основанного на их геометрических свойствах, мне нигде встречать не приходилось, и, насколько мне известно, такого рода изложение нигде не было предложено.

Само собой разумеется, что выбранный метод изложения заставляет нас ограничиваться исключительно действительными значениями аргумента.

### 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

При изложении в дальнейшем свойств гиперболических функций мы будем опираться на некоторые свойства равносторонней гиперболы, с вывода которых мы и начнем; при этом равностороннюю

гиперболу будем рассматривать просто как график обратной пропорциональности:

$$y = \frac{k}{x};$$

не предполагая известными никаких ее свойств.

**Теорема 1.** Если абсциссы четырех точек  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (фиг. 1), лежащих на равносторонней гиперболе, между собою пропорциональны, то площади прямолинейных трапеций  $M_1M_2N_2N_1$  и  $M_3M_4N_4N_3$  между собою равны.

**Доказательство.** Из уравнения гиперболы имеем:

$$y_i = \frac{k}{x_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

откуда в силу пропорциональности:

$$x_1 : x_2 = x_3 : x_4$$

находим, что высоты обеих трапеций обратно пропорциональны их средним линиям:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} : \frac{y_3 + y_4}{2} = (x_4 - x_3) : (x_2 - x_1).$$

Отсюда и следует теорема.

**Теорема 2.** Если абсциссы четырех точек  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (фиг. 1), лежащих на равносторонней гиперболе, между собою пропорциональны, то площади криволинейных трапеций  $M_1M_2N_2N_1$  и  $M_3M_4N_4N_3$  между собою равны.

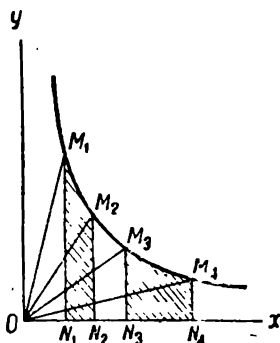
**Доказательство.** Разбиваем каждый из отрезков  $N_1N_2$  и  $N_3N_4$  на  $n$  равных частей, где  $n$  — любое целое число, и строим соответствующие полученным точкам деления точки гиперболы. Соединяя эти точки на каждой из дуг  $M_1M_2$ ,  $M_3M_4$ , получаем две многоугольные площади, которые будут равновелики по теореме 1. Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , мы получим искомый результат.

Очевидно, что будет иметь место и обратное предположение: если две криволинейные трапеции равновелики, то абсциссы соответствующих точек  $M_1, M_2, M_3, M_4$  будут между собою пропорциональны.

**Теорема 3.** Если абсциссы точек  $M_1, M_2, M_3, M_4$ , лежащих на равносторонней гиперболе (фиг. 1), пропорциональны между собою, то площади секторов  $OM_1M_2$ ,  $OM_3M_4$  между собою равны.

**Доказательство.** Из фиг. 1 имеем:

$$\begin{aligned} \text{пл. сект. } OM_1M_2 &= \text{пл. } M_1M_2N_2N_1 + \\ &+ \text{пл. } \triangle OM_1N_1 - \text{пл. } \triangle OM_2N_2 = \text{пл. } M_1M_2N_2N_1, \end{aligned}$$



Фиг. 1.

так как в силу уравнения гиперболы треугольники  $OM_1N_1$  и  $OM_2N_2$  равновелики. Точно так же

площ. сектора  $OM_3M_4 = \text{площ. } M_3M_4N_4N_3$ ,

и по теореме 2 получим:

площ. сектора  $OM_1M_2 = \text{площ. сектора } OM_3M_4$ .

Очевидно, что будет иметь место и обратное предложение.

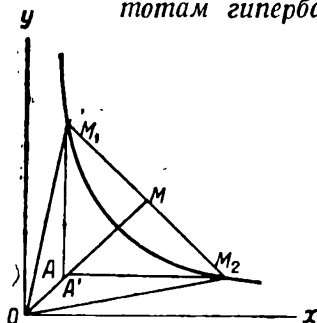
**Теорема 4.** Если точка  $M$  — середина хорды  $M_1M_2$  гиперболы (фиг. 2), то прямые, проведенные через  $M_1$  и  $M_2$  параллельно асимптотам гиперболы, пересекаются на прямой  $OM$ .

*Доказательство.* Пусть  $M_1A \parallel Oy$ . Тогда

$$\frac{OA}{OM} = \frac{x_1}{\frac{x_1 + x_2}{2}} = \frac{2x_1}{x_1 + x_2}.$$

Если  $M_2A' \parallel Ox$ , то

$$\frac{OA'}{OM} = \frac{2y_2}{y_1 + y_2}.$$

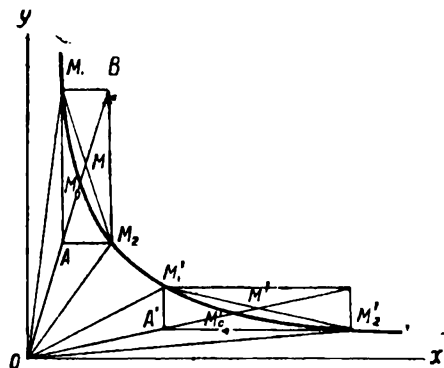


Фиг. 2.

Но в силу уравнения гиперболы правые части этих уравнений равны; следовательно,  $OA' : OM = OA : OM$ ; точки  $A$  и  $A'$  совпадают, что и требовалось доказать.

**Теорема 5.** Если  $M$  — середина хорды  $M_1M_2$  гиперболы, то прямые  $OM$  и  $M_1M_2$  образуют с асимптотами гиперболы одни и те же углы.

*Доказательство.* В силу теоремы 4 мы получаем прямоугольный треугольник  $M_1AM_2$ , в котором  $AM$  будет медианой, откуда и следует теорема.



Фиг. 3.

**Теорема 6.** Если  $M$  — середина хорды  $M_1M_2$ , то прямая  $OM$  пересекает гиперболу в точке  $M_0$  (фиг. 3), координаты которой служат средними пропорциональными между координатами точек  $M_1$  и  $M_2$ .

Заметим, что теорема 5 может служить основой для теории сопряженных диаметров гиперболы, так как из нее вытекает, что направление  $OM$  (сопряженного данной хорде диаметра) зависит лишь от направления хорды  $M_1M_2$ . Не останавливаясь на этом, мы будем в дальнейшем называть направления хорды  $M_1M_2$  и диаметра  $OM$  сопряженными направлениями, заимствуя этот термин из теории сопряженных диаметров.

*Доказательство.* В силу уравнения гиперболы

$$x_0 y_0 = x_1 y_1 = x_2 y_2.$$

Так как точка  $A$  лежит на прямой  $OM$ , то

$$x_1 : x_0 = y_2 : y_0,$$

а так как и точка  $B$  лежит на той же прямой, то

$$x_2 : x_0 = y_1 : y_0.$$

Перемножая почленно уравнения

$$x_0 y_0 = x_1 y_1 \text{ и } x_0 : y_0 = x_2 : y_1,$$

мы получим:

$$x_0^2 = x_1 x_2,$$

и аналогично:

$$y_0^2 = y_1 y_2,$$

что и требовалось доказать.

Из этой теоремы в соединении с теоремой 3 вытекает, что диаметр  $OM_0$ , сопряженный с хордой  $M_1 M_2$ , делит площадь сектора  $OM_1 M_2$  пополам.

**Теорема 7.** Если (фиг. 3)

$$\text{пл. сектора } OM_1 M_2 = \text{пл. сектора } OM'_1 M'_2$$

и точки  $M, M'$  — середины хорд  $M_1 M_2$  и  $M'_1 M'_2$ , то имеет место пропорциональность:

$$OM_0 : OM : M_1 M_2 = OM'_0 : OM' : M'_1 M'_2.$$

*Доказательство.* Ввиду равновеликости секторов имеем по теореме 3 пропорциональность координат:

$$x_1 : x_2 = x'_1 : x'_2.$$

Но в этом случае

$$\frac{OM}{OM'} = \frac{x_1 + x_2}{x'_1 + x'_2} = \frac{x_1}{x'_1}; \quad \frac{OM_0}{OM'_0} = \frac{\sqrt{x_1 x_2}}{\sqrt{x'_1 x'_2}} = \frac{x_1}{x'_1}; \quad \frac{M_1 M_2}{M'_1 M'_2} = \frac{x_2 - x_1}{x'_2 - x'_1} = \frac{x_1}{x'_1},$$

откуда и следует теорема.

Из последней теоремы вытекает, что два отношения:

$$\frac{MM_1}{OM_0} = \frac{M'M'_1}{OM'_0}; \quad \frac{OM}{OM_0} = \frac{OM'}{OM'_0}$$

являются для данной гиперболы функциями только от площади  $S$  сектора  $OM_1 M_2 = OM'_1 M'_2$ . Чтобы вполне фиксировать вид этой

функциональной зависимости, мы должны выбрать определенную гиперболу. Выберем с этой целью гиперболу

$$xy = \frac{1}{2},$$

и положим:

$$\text{пл. } OM_1M_2 = S; \quad \frac{MM_1}{OM_0} = \text{sh } S; \quad \frac{OM}{OM_0} = \text{ch } S,$$

назвав последние отношения (по определению) *гиперболическим синусом* и *гиперболическим косинусом* от  $S$ .

Так как согласно замечанию, сделанному при доказательстве теоремы 6, прямая  $OM_0$  делит площадь сектора  $OM_1M_2$  пополам, то для построения гиперболических функций от аргумента  $S$  достаточно построить сектор  $OM_0M_1$ , имеющий площадь  $\frac{1}{2}S$  (фиг. 4), и

через  $M_1$  провести прямую  $M_1M$ , сопряженную с  $OM_0$ ; отношения

$$\frac{MM_1}{OM_0} \quad \text{и} \quad \frac{OM}{OM_0}$$

и дают  $\text{sh } S$  и  $\text{ch } S$ .

Из этого построения вытекает, что данное нами определение гиперболических функций не противоречит обычному; именно, если за  $OM_0$  принять биссектрису угла между осями координат, то будем иметь  $OM_0 = 1$ , а в силу теоремы 5  $MM_1 \perp OM$ , так что наше определение совпадает с обычным.

Приведенные выше свойства гиперболы позволяют непосредственно получить соотношение, связывающее две гиперболические функции одного и того же аргумента

$$\text{ch}^2 S - \text{sh}^2 S = 1,$$

не пользуясь уравнением равносторонней гиперболы относительно осей.

Действительно, так как по теореме 6 мы имеем:

$$x_0^2 = x_1 x_2,$$

то (фиг. 3)

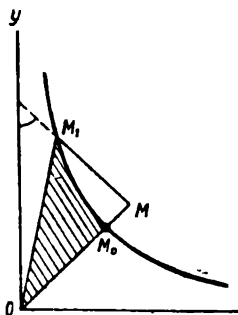
$$\begin{aligned} OM_0^2 &= OA \cdot OB = (OM + MB)(OM - MB) = OM^2 - MB^2 = \\ &= OM^2 - MM_1^2, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{OM^2}{OM_0^2} - \frac{MM_1^2}{OM_0^2} = 1,$$

т. е.

$$\text{ch}^2 S - \text{sh}^2 S = 1.$$



Фиг. 4.

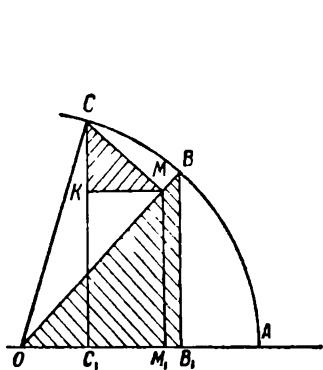
Заметим еще, что доказанное равенство

$$OM^2 - MM_1^2 = OM_0^2$$

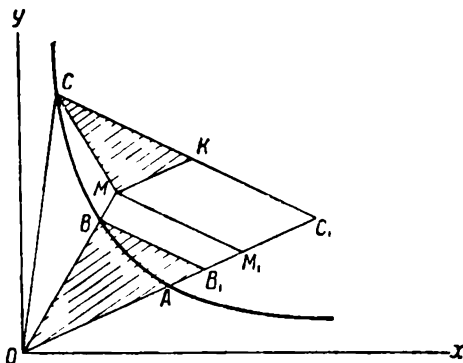
дает непосредственно (без преобразования координат) уравнение равносторонней гиперболы относительно любой пары сопряженных диаметров.

## II. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ

Выведем теперь, пользуясь данным геометрическим определением гиперболических функций, теорему сложения для этих функций. Доказательство поведем вполне аналогично известному доказательству теоремы сложения для обычных тригонометрических функций. Для уяснения идеи доказательства приведем наряду с чертежом для гиперболических функций (фиг. 6) аналогичный чертеж для тригонометрических функций, на котором соответствующие точки обозначены теми же самыми буквами (фиг. 5).



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Пусть (фиг. 6) площ. сектора  $OAB = \frac{1}{2} \alpha$ ; площ. сектора  $OBC = \frac{1}{2} \beta$ . Тогда площ. сектора  $OAC = \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$ .

Для построения гиперболических функций аргументов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha + \beta$  поступаем согласно сказанному в § 1: проводим прямую  $BB_1$ , сопряженную по направлению с  $OA$  (т. е. такую, чтобы она с асимптотами гиперболы образовала те же углы, что и  $OA$ ). Далее, строим  $CC_1 \parallel BB_1$ . Аналогично строим прямую  $CM$ , сопряженную с  $OB$ .

При этом

$$\operatorname{sh} \alpha = \frac{B_1B}{OA}; \quad \operatorname{sh} \beta = \frac{MC}{OB}; \quad \operatorname{sh} (\alpha + \beta) = \frac{C_1C}{OA};$$

$$\operatorname{ch} \alpha = \frac{OB_1}{OA}; \quad \operatorname{ch} \beta = \frac{OM}{OB}; \quad \operatorname{ch} (\alpha + \beta) = \frac{OC_1}{OA}.$$



Строим прямые  $MM_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$  и  $MK \parallel OA$ . Имеем:

$$\operatorname{sh}(\alpha + \beta) = \frac{C_1C}{OA} = \frac{C_1K}{OA} + \frac{KC}{OA} = \frac{M_1M}{OA} + \frac{KC}{OA}.$$

В силу подобия треугольников  $OM_1M$  и  $OB_1B$  получим:

$$\frac{M_1M}{B_1B} = \frac{OM}{OB},$$

и потому

$$\frac{M_1M}{OA} = \frac{B_1B}{OA} \cdot \frac{OM}{OB} = \operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{ch} \beta.$$

Далее, треугольник  $KMC$  подобен треугольнику  $OB_1B$ , так как  $\angle AOB = \angle KCM$ , как это следует из свойств прямых, имеющих сопряженные направления. Из подобия этих треугольников имеем:

$$\frac{KC}{OB_1} = \frac{MC}{OB}$$

и, следовательно,

$$\frac{KC}{OA} = \frac{OB_1}{OA} \cdot \frac{MC}{OB} = \operatorname{ch} \alpha \cdot \operatorname{sh} \beta.$$

Отсюда и получаем:

$$\operatorname{sh}(\alpha + \beta) = \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta + \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \beta.$$

Точно так же имеем:

$$\operatorname{ch}(\alpha + \beta) = \frac{OM_1}{OA} = \frac{M_1C_1}{OA} = \frac{OM_1}{OA} + \frac{MK}{OA}.$$

Пользуясь подобием рассмотренных выше пар треугольников, найдем:

$$\frac{OM_1}{OA} = \frac{OB_1}{OA} \cdot \frac{OM}{OB} = \operatorname{ch} \alpha \cdot \operatorname{ch} \beta;$$

$$\frac{MK}{OB} = \frac{B_1B}{OA} \cdot \frac{MC}{OB} = \operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{sh} \beta,$$

и отсюда

$$\operatorname{ch}(\alpha + \beta) = \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta.$$

Заметим, что при доказательстве теоремы нам пришлось пользоваться сопряженностью направлений относительно гиперболы именно там, где в обычной тригонометрии пользуются перпендикулярностью, т. е. сопряженностью относительно окружности.

Теперь становится понятным, зачем пришлось отступить от обычного геометрического определения гиперболических функций, приведенного в самом начале статьи, и дать более общее определение: при доказательстве теоремы сложения мы строили гиперболические функции аргументов  $\alpha$  и  $\beta$ , пользуясь различными «начальными радиусами».

Из соотношения

$$\operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{sh}^2 \alpha = 1,$$

доказанного ранее, и только что доказанных теорем сложения все остальные формулы гиперболической тригонометрии выводятся непосредственно путем алгебраических преобразований.

Не останавливаясь на этом, перейдем к выводу аналитического выражения гиперболических функций из их геометрических свойств.

### III. ВЫВОД АНАЛИТИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ИЗ ИХ СВОЙСТВ

Принимая во внимание теорему сложения, легко убедиться, что функция

$$f(\alpha) = \operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha$$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(\alpha) f(\beta) = f(\alpha + \beta).$$

Действительно:

$$\begin{aligned} f(\alpha) f(\beta) &= (\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha) (\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta) = \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta + \\ &+ \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \beta + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta = \operatorname{ch}(\alpha + \beta) + \operatorname{sh}(\alpha + \beta) = f(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Элементарно доказывается <sup>1)</sup>, что всякая функция, удовлетворяющая этому функциональному уравнению (если она непрерывна), имеет вид:

$$f(\alpha) = m^{\alpha}, \quad (m = \operatorname{const}).$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha = m^{\alpha}.$$

Ввиду доказанного уже равенства  $\operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{sh}^2 \alpha = 1$ , получим отсюда:

$$\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{sh} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha} = m^{-\alpha}.$$

Складывая и вычитая оба полученных равенства, имеем:

$$\operatorname{ch} \alpha = \frac{m^{\alpha} + m^{-\alpha}}{2}; \quad \operatorname{sh} \alpha = \frac{m^{\alpha} - m^{-\alpha}}{2}.$$

Остается только определить значение постоянной  $m$ . Это можно делать, опираясь на следующее свойство гиперболического синуса.

**Теорема.**  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha} = 1.$

**Доказательство.** Построим (фиг. 7) равноделящую  $OM$  угла между асимптотами. При этом  $OM_0 = 1$ . Строим хорду  $M_1 M_2 \perp OM$ ,

<sup>1)</sup> См. например Лахгин Л. К., «Энциклопедия математики», ч. I, стр. 101, М. 1925.

причем  $M_1M = MM_2$ . Проводим в точке  $M_0$  касательную  $N_1N_2$  к кривой. Так как  $OM_0$  — ось симметрии, то  $N_1N_2 \perp OM_0$ , и, следовательно,  $N_1N_2 \parallel M_1M_2$ .

Пусть площ. сектора  $OM_1M_2 = \alpha$ , и, следовательно,

$$\operatorname{ch} \alpha = \frac{OM}{OM_0} = OM; \quad \operatorname{sh} \alpha = \frac{MM_1}{OM_0} = MM_1.$$

Очевидно,

$$\text{пл.} \triangle ON_1N_2 < \alpha < \text{пл.} \triangle OM_1M_2,$$

или

$$\frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha} < \alpha < \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha} < \frac{\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} < \operatorname{ch} \alpha,$$

откуда обычным путем следует теорема. Теперь мы имеем, с одной стороны,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha} = 1;$$

с другой стороны, по известному свойству показательной функции, пользуясь найденными выше выражениями гиперболических функций через показательные:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{m^\alpha - m^{-\alpha}}{2\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{m^{2\alpha} - 1}{2\alpha} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0} m^{-\alpha} = \ln m,$$

Таким образом мы имеем:

$$\ln m = 1, \text{ и, следовательно, } m = e.$$

Подставляя найденное значение  $m$  в полученные ранее выражения  $\operatorname{ch} \alpha$  и  $\operatorname{sh} \alpha$ , получим:

$$\operatorname{ch} \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}; \quad \operatorname{sh} \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2},$$

обычные выражения гиперболических функций через показательные.

#### IV. СВЯЗЬ С ТЕОРИЕЙ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

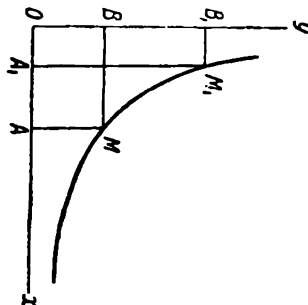
Изложенная теория гиперболических функций основывалась по существу на двух положениях:

1) хорда и сопряженный ей полудиаметр равносторонней гиперболы образуют с асимптотой гиперболы равные углы (теорема 5); другими словами, асимптоты равносторонней гиперболы делят углы между сопряженными направлениями пополам;

2) если строить равновеликие секторы равносторонней гиперболы, то соответствующие им хорды и расстояния середин этих хорд от центра будут иметь постоянное отношение к полу-диаметрам, сопряженным этим хордам (теорема 7). Отсюда вытекала возможность при построении гиперболических косинусов и синусов откладывать площади секторов от любого полу-диаметра гиперболы, подобно тому как в элементарной геометрии имеется возможность откладывать углы данной величины от любого полу-диаметра.

Последнее свойство стоит в тесной связи с возможностью аффинного преобразования равносторонней гиперболы самой в себя, вытекающей из следующей теоремы.

**Теорема.** *Существует одно и только одно аффинное преобразование плоскости, преобразующее данную равностороннюю гиперболу самое в себя, так что каждая асимптота переходит сама в себя (а не в другую асимптоту!) и данная точка гиперболы  $M$  преобразуется в наперед заданную точку  $M_1$ . Это преобразование будет преобразованием, сохраняющим площади.*



Фиг. 8.

**Доказательство.** Искомое преобразование, если оно существует, должно преобразовать  $\triangle MAB$  (фиг. 8) в  $\triangle M_1A_1B_1$ , откуда следует, что преобразование, если оно существует, будет единственным. Обратно, соответствие треугольников  $MAB$  и  $M_1A_1B_1$  определяет аффинное преобразование, в котором прямые  $AA_1$  и  $BB_1$  необходимо преобразуются сами в себя (действительно, так как  $MB$  преобразуется в  $M_1B_1$ , то и  $AA_1$  преобразуется в прямую, проходящую через  $A_1$  и параллельную  $AA_1$ , т. е. в  $AA_1$ , и то же относительно  $BB_1$ ). Это соответствие сохраняет площади, так как в силу расположения точек на гиперболе  $\text{пл. } \triangle MAB = \text{пл. } \triangle M_1A_1B_1$ . Наконец, это преобразование преобразует гиперболу самое в себя, так как гипербола есть геометрическое место вершин равновеликих прямоугольников, построенных на прямых  $AA_1$  и  $BB_1$ . Таким образом наша теорема доказана.

Мы могли бы, конечно, просто указать формулы для искомого преобразования вместо геометрического доказательства теоремы; именно мы имеем:

$$x' = \lambda x; \quad y' = \frac{y}{\lambda},$$

где  $\lambda$  определяется по координатам заданных точек  $M$  и  $M_1$ .

Основываясь на этой теореме, мы можем очень ясно представить доказательство теоремы 7, являющейся основой теории. Действительно, возьмем аффинное преобразование, преобразующее  $M_1$  в  $M'_1$  (фиг. 3). В силу равновеликости секторов оно будет преобразовывать  $M_2$  в  $M'_2$ . Отсюда следует, что точки  $M, M_0, A, B$  преобразуются соответственно в  $M', M'_0, A', B'$ . По свойству аффинных

преобразований ряды точек  $OAM_0MB$  и  $OA'M'_0M'B'$  подобны. Отсюда за заменой  $AM = MM_1$  и  $A'M' = M'M'_1$  и получается теорема 7.

Рассматриваемые аффинные преобразования приобретают особый смысл, если воспользоваться проективной метрикой для углов. Именно, примем за элементы, определяющие метрику углов на плоскости, бесконечно удаленную прямую и две бесконечно удаленные точки асимптот гиперболы.

В таком случае рассматриваемые выше аффинные преобразования будут «вращениями», прямые сопряженных направлений относительно гиперболы будут «перпендикулярными» между собою в этой новой метрике. При этом доказательство теоремы сложения в § II будет уже полностью повторять соответствующее доказательство для тригонометрических функций. Заметим, что если мы, введя такого рода метрику, вычислим по формулам Кэли-Клейна величины «углов» между прямыми, выходящими из начала координат, то окажется, что проективная мера «углов» будет пропорциональна эвклидовой (обычной) мере площадей секторов равносторонней гиперболы, и аргументами гиперболических функций можно сделать «углы» проективной метрики, подобно тому как углы (в обычном смысле слова) служат аргументами тригонометрических функций.

## ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Н. Г. Чудаков (Саратов)

В анализе очень хорошо известен тот факт, что  $e^x$ ,  $\cos x$  и  $\sin x$  суть трансцендентные функции. Но это обычно редко доказывается и, вероятно, многие даже не знают, что это может быть доказано совершенно элементарно.

Лемма:  $(e^{hx} P_n(x))^{(m)} = e^{hx} Q_n(x)$ .

Здесь  $P_n(x)$  и  $Q_n(x)$  — многочлены степени  $n$ ;  $k$  — число  $\neq 0$ .

*Доказательство.* Доказательство леммы выполняется при помощи формулы Лейбница для производной  $m$ -го порядка от произведения.

**Теорема I.** *Функция  $e^x$  — трансцендентная функция (здесь  $x$  — комплексное переменное).*

*Доказательство.* Доказательство ведется от противного. Пусть  $e^x$  — алгебраическая функция. Тогда выполнено тождественное равенство:

$$a_0(x) + a_1(x)e^x + a_2(x)e^{2x} + \dots + a_k(x)e^{hx} \equiv 0, \quad (1)$$

где  $a_0(x)$ ,  $a_1(x)$ ,  $a_2(x)$ , ...,  $a_k(x)$  — многочлены, степени которых обозначим соответственно  $n_0, n_1, n_2, \dots, n_k$ . При этом  $a_k(x) \not\equiv 0$ .

Возьмем от обеих частей равенства (1) производную  $(n_0 + 1)$ -го порядка; тогда  $a_0(x)$  будет «уничтожено» этой операцией, и мы получим в результате:

$$b_1(x)e^x + b_2(x)e^{2x} + \dots + b_k(x)e^{hx} \equiv 0, \quad (2)$$

где  $b_n(x)$  имеет степень  $n$ . Сократив обе части равенства (2) на  $e^x \neq 0$ , получаем:

$$b_1(x) + b_2(x)e^x + \dots + b_n(x)e^{(n-1)x} \equiv 0.$$

От обеих частей равенства берем производную порядка  $(n+1)$ ; уничтожается  $b_1(x)$ ; сокращаем на  $e^x$  и т. д.

В результате приходим к невозможному тождеству

$$q_n(x)e^x \equiv 0,$$

где  $q_n(x)$  — многочлен, заведомо тождественно не равный нулю.

**Теорема II.**  $\sin x$  — трансцендентная функция.

**Доказательство.** Пусть  $\sin x$  — функция алгебраическая. Тогда  $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$  есть также алгебраическая функция.

Наконец,  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ , как сумма алгебраических функций, тоже алгебраическая функция.

А это последнее невозможно в силу теоремы I.

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

### (Перспективные преобразования)

А. С. Кованько (Ленинград)

#### 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ВЫВОДЫ

Вопрос о построении изображений предметов в их проекции на плоскость полностью разрешен методами начертательной геометрии. В настоящей работе мы даем аналитическое решение этой задачи.

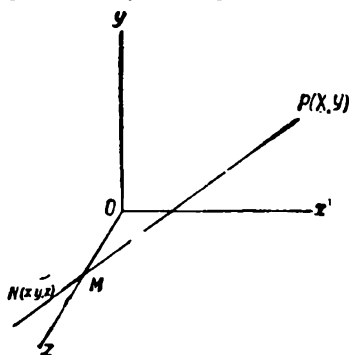
Остановимся на методе центральной проекции (или перспективы) и исследуем его с точки зрения аналитической геометрии.

Возьмем точку  $M$  в качестве центра проектирования;  $MO = \delta$  (фиг. 1).

Любая точка  $N(x, y, z)$  преобразуется в точку  $P(X, Y)$  проектированием ее из точки  $M(0, 0, \delta)$ . Точку  $M$  мы для простоты выбрали на оси  $OZ$ .

Рассмотрим соответствие между координатами точек  $N$  и  $P$ . Уравнение прямой, проходящей через  $M$  и  $N$ , напишется так:

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z - \delta}{z - \delta}, \quad (1)$$



Фиг. 1.

где  $X, Y, Z$  — текущие координаты прямой. Пересечение этой прямой с плоскостью  $XOY$  и определяет положение точки  $P$ . Ее коор-

динаты получаем, полагая в уравнении (1)  $Z = 0$ , тогда находим:

$$X = \frac{x}{1 - \frac{z}{\delta}}; \quad Y = \frac{y}{1 - \frac{z}{\delta}}. \quad (2)$$

Это — основные формулы перспективного преобразования. Рассмотрим пучок параллельных между собой прямых:

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha t + m; \\ y &= \beta t + n; \\ z &= \gamma t + p; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

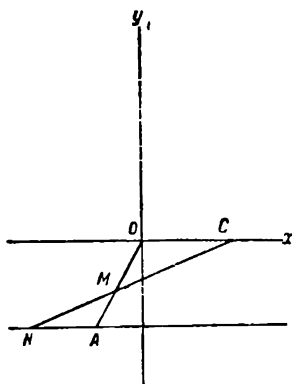
$\alpha, \beta, \gamma$  — данные нам величины,  $m, n, p$  — произвольные постоянные семейства.

В перспективе этот пучок представится так:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{1}{\rho} \left[ \alpha + \frac{\rho m - \sigma \alpha}{\rho t + \sigma} \right]; \\ Y &= \frac{1}{\rho} \left[ \beta + \frac{\rho n - \sigma \beta}{\rho t + \sigma} \right], \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $\rho = -\frac{\gamma}{\delta}$ ;  $\sigma = \frac{\delta - p}{\delta}$ , т. е. мы имеем пучок прямых, проходящих через точку  $\left(-\frac{\alpha\delta}{\gamma}, -\frac{\beta\delta}{\gamma}\right)$ . Это есть точка схода для данного пучка параллельных между собой прямых.

Итак, мы имеем основную теорему теории перспективы: *Все параллельные пучки прямых в пространстве дают в изображении на плоскости пучок прямых, проходящих через одну точку.*



Фиг. 2.

## II. МЕТОД ПЕРСПЕКТИВНЫХ ПОСТРОЕНИЙ

Пользуясь аналитической формулой построения изображений точек в перспективе, мы можем указать весьма простой геометрический способ их построения (обычный способ).

Пусть требуется построить изображение точки  $(x, y, z)$ . Мы берем в плоскости чертежа систему координат  $ХОУ$ , причем ось  $ОХ$  выбираем горизонтально (это — линия горизонта) (фиг. 2). Соединим точку  $A(-x, -y)$  с точкой  $O(0, 0, 0)$

(точка схода). Уравнение полученной прямой есть

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y}. \quad (5)$$

Затем соединим точку  $N(2\delta - (x + z), -y)$  с точкой  $C(\delta, 0)$ .

Уравнение полученной прямой будет

$$\frac{x - \delta}{0 - (x + z)} = \frac{y}{y}. \quad (6)$$

Совершенно ясно, что точка пересечения прямых (5) и (6) есть точка

$$M \left( \frac{x}{1 - \frac{z}{\delta}}, \frac{y}{1 - \frac{z}{\delta}} \right),$$

т. е. наша искомая точка.

## ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ДИАГРАММЫ

В. В. Добровольский (Москва)

Всякая задача только тогда может считаться решенной, если имеется возможность произвести все вычисления и получить в результате число.

В настоящее время разработано много методов производства таких вычислений. Среди них особое место занимают графические методы, обладающие ценным преимуществом — наглядностью, — позволяющим легко обзирать всю область явлений, охватываемых данной задачей. Крупным недостатком их является не особенно высокая точность, зависящая от искусства чертежника. Во многих случаях, однако, эта точность бывает достаточна для практических потребностей, а при желании может быть увеличена применением метода последовательных приближений. Весьма часто задача приводится к вычислению значений функции по заданным значениям аргумента. Этой задачей мы и займемся в настоящей статье.

Известно, что функция одного переменного

$$y = f(x)$$

может быть задана либо формулой, либо таблицей, либо графиком, либо еще как-нибудь. Но во всяком случае она может быть изображена графиком за исключением некоторых особых функций, не имеющих большого практического значения. В декартовых координатах мы получим, вообще говоря, некоторую кривую; в случае линейной функции получим прямую. Нахождение числового значения функции по заданному числовому значению аргумента, а также и обратно, по заданному значению функции — значения аргумента, получается чрезвычайно просто и известно из любого учебника математики.

Возьмем теперь функцию двух переменных

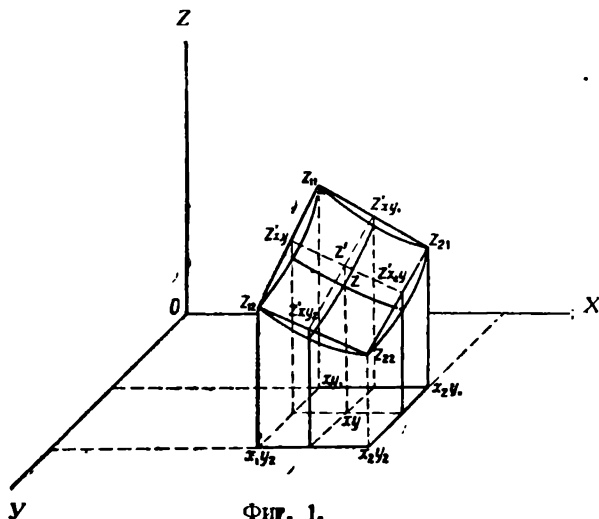
$$z = F(x, y).$$

Она тоже может быть задана либо формулой, либо таблицей с двумя входами; но графическое задание или графическое изображение этой функции представляет уже некоторые трудности.



Часто применяют для этой цели также декартовы координаты в плоскости, например  $x, z$ , и наносят ряд кривых, из которых каждая соответствует определенному значению аргумента  $y$ , которое и надписывается у кривой. Такой способ представляет затруднения для определения значения функции, соответствующего промежуточному значению аргумента  $y$ , а также для определения этого аргумента по заданным  $x$  и  $z$ .

Если взять декартовы координаты в пространстве, то уравнению  $z = F(x, y)$  будет отвечать поверхность. Изготовление такой поверхности и пользование ею для подсчетов также сопряжено с



Фиг. 1.

большими трудностями. В настоящей статье мы указываем, как обойти эти трудности при помощи изображения трехмерного пространства на плоскости. Для этого проводим из произвольной точки плоскости  $O$  три произвольных<sup>1)</sup> прямых  $OX, OY$  и  $OZ$ , изображающих проекции координатных осей на нашу плоскость (фиг. 1).

На каждой прямой назначаем какой-либо масштаб для значений аргументов  $x, y$  и функции  $z$ . Отложив по оси  $OX$  значения аргумента  $x_1, x_2$  и т. д., а по оси  $OY$  — значения  $y_1, y_2$  и т. д. и проведя через полученные точки деления линии, параллельные осям, получим на плоскости  $XOY$  точки:

$(x_1y_1), (x_2y_1), (x_1y_2), (x_2y_2)$  и т. д.

Проводя через эти точки линии, параллельные оси  $OZ$ , и откладывая на них значения функции  $z_{11}, z_{21}, z_{12}, z_{22}$  и т. д., получим изображения точек поверхности.

Строя таким образом точку за точкой, мы получим представление о самой поверхности. Обыкновенно наносят сеть кривых, представляющих сечения данной поверхности плоскостями

$x = \text{const}$  и  $y = \text{const}$ .

Клеточка такой сети изображена на нашем чертеже в форме криволинейного четырехугольника.

<sup>1)</sup> На прилагаемом чертеже линии  $OX$  и  $OY$  перпендикулярны, но это не обязательно; горизонтальное и вертикальное направление этих линий также не обязательно.

Для определения значения функции, соответствующего промежуточным значениям аргументов  $x$  и  $y$ , находим точку  $(xy)$ , разбиваем нашу клеточку на четыре более мелких клеточки проведением двух новых кривых и получаем таким образом точку  $z$  пересечения этих кривых; эта точка должна лежать также на прямой, параллельной  $OZ$  и проходящей через точку  $(xy)$ .

Если функция задана таблицей с двумя входами, из которой известны значения функции для значений аргумента  $x_1$  и  $x_2$ , ближайших к заданному  $x$ , и для  $y_1$  и  $y_2$ , ближайших к заданному  $y$ , то значение  $z$  может быть найдено процессом двойного интерполирования, который заключается в следующем. Находят значения функции  $z_{11}$  и  $z_{12}$  для аргументов  $x_1y_1$  и  $x_1y_2$  и принимают для промежуточных значений  $y$  между  $y_1$  и  $y_2$  линейный закон, вследствие чего для значений  $x_1$  и  $y$  получают пропорцию:

$$\frac{z_{11} - z'_{x_1y}}{z_{11} - z_{12}} = \frac{y_1 - y}{y_1 - y_2},$$

из которой определяют  $z'_{x_1y}$ .

Затем подобным же образом составляют пропорцию:

$$\frac{z_{21} - z_{x_2y}}{z_{21} - z_{22}} = \frac{y_1 - y}{y_1 - y_2},$$

из которой определяют  $z'_{x_2y}$ .

Из чертежа мы усматриваем, что эти вычисления соответствуют замене дуг  $z_{11}z_{12}$  и  $z_{21}z_{22}$  одноименными хордами, вследствие чего получается видимая на чертеже неточность. Наконец, интерполируют между  $x_1$  и  $x_2$ , составляя пропорцию:

$$\frac{z'_{x_1y} - z'}{z'_{x_1y} - z'_{x_2y}} = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}.$$

Отсюда определяют  $z'$ , которое и принимают за значение функции, соответствующее значениям  $x$  и  $y$ .

Из чертежа видно, что это соответствует проведению прямой  $z'_{x_1y}z'_{x_2y}$  и нахождению на ней точки  $z$ , соответствующей точке  $(xy)$ . Можно было бы интерполировать сначала для  $y_1$  между  $x_1$  и  $x_2$  и получить точку  $z'_{xy_1}$ , затем — для  $y_2$  между  $x_1$  и  $x_2$  и получить точку  $z_{xy_2}$  и, наконец, — для  $x$  между  $y_1$  и  $y_2$ , что соответствует нанесению хорд  $z_{11}z_{21}$ ,  $z_{12}z_{22}$  и прямой  $z_{xy_1}z_{xy_2}$ . Этим процессом получается та же точка  $z'$ , которая, однако, не совпадает с действительной точкой  $z$  поверхности.

Приведем несколько примеров.

7. Известна эмпирическая формула Машека, определяющая среднюю силу тяги животного в зависимости от скорости движения и продолжительности работы:

$$P = P_0 \left( 3 - \frac{v}{v_0} - \frac{t}{t_0} \right).$$

Здесь  $P_0$ ,  $v_0$  и  $t_0$  — «наивыгоднейшие» значения силы тяги, скорости и времени, т. е. те значения, при которых получается наибольшая производительность

$$L_{\max} = P_0 v_0 t_0.$$

Если ввести вспомогательные переменные

$$\frac{P}{P_0} = z; \quad \frac{v}{v_0} = x; \quad \frac{t}{t_0} = y,$$

то получим:

$$z = 3 - x - y.$$

Это есть уравнение плоскости, которая может быть изображена, если на осях координат (фиг. 2) отложить по 3 деления на каждой и соединить конечные точки.

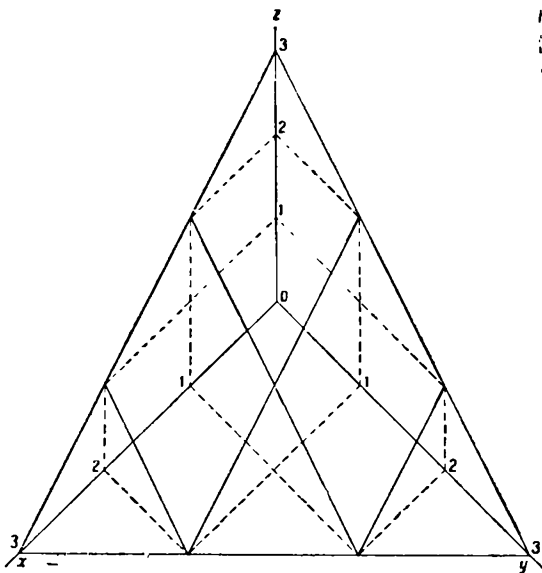
Чертеж дает наглядное представление об изменениях  $P$  в зависимости от  $v$  и  $t$ ; наивыгоднейшее значение  $P = P_0$  получается при  $v = v_0$  и  $t = t_0$ .

На фиг. 3 показано изменение суточной работы животного согласно формуле:

$$L = P v t,$$

при введении вспомогательных переменных:

$$\frac{L}{L_{\max}} = z; \quad \frac{v}{v_0} = x; \quad \frac{t}{t_0} = y.$$



Фиг. 2.

Выполнив подстановки мы имеем, следовательно, функцию

$$z = xy(3 - x - y),$$

для которой максимум соответствует:

$$x = y = 1.$$

На диаграмме показана сеть парабол, изображающих кривые:

$$x = \text{const} \text{ и } y = \text{const}.$$

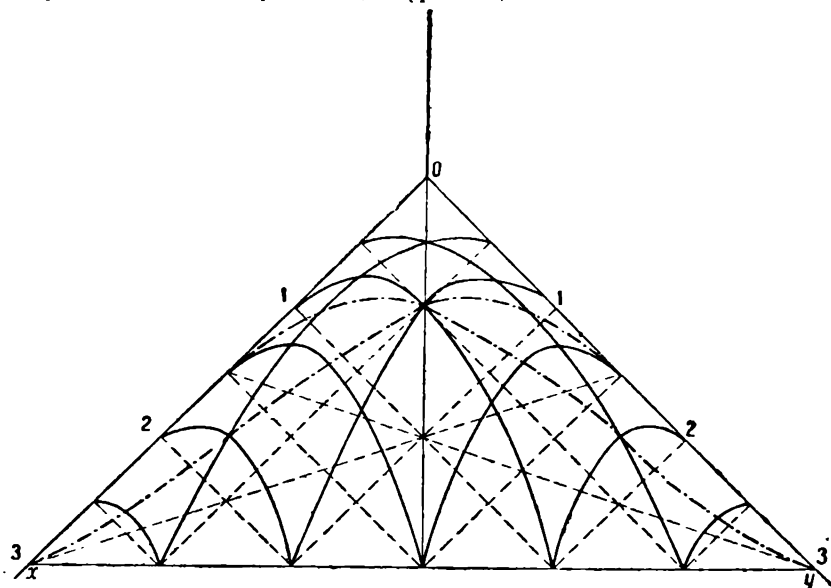
2. Известное уравнение для идеального газа:

$$p v = R T,$$

связывает давление  $p$ , удельный объем  $v$  и абсолютную температуру  $T$  при газовой постоянной  $R$ . Легко видеть, что кривые

$p = \text{const}$  и  $v = \text{const}$  являются прямыми, а потому построение диаграммы очень просто: откладываем  $p = 25, 50, 75$  и  $100 \text{ кг/м}^2$ ,  $v = 50, 100, 150, 200, 250$  и  $300 \text{ м}^3/\text{кг}$  и вычисляем  $T$  для  $p = 100$ ,  $v = 300$  и  $R = 29,7$  (сухой воздух).

Находим верхнюю точку диаграммы  $T = 1010^\circ$  абс. Соединяя ее с двумя нижними и проводя сеть прямых для указанных значений  $p$  и  $v$ , получаем диаграмму заданного уравнения в виде гиперболического параболоида (фиг. 4).



Фиг. 3.

3. Для решения квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

имеем известные выражения корней в функции коэффициентов:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Вместо пользования этой формулой можно построить поверхность в координатах  $p, q, x$  (фиг. 5), т. е.

$$F(p, q, x) = 0.$$

Прежде всего замечаем, что кривые

$$x = \text{const}$$

обращаются в прямые, которые и построены на фиг. 5 для

$$\begin{aligned} x = 0; \quad x = 0,2; \quad x = 0,4; \quad x = 0,6; \quad x = 0,8; \quad x = 1,0; \\ x = -0,2; \quad x = -0,4; \quad x = -0,6; \quad x = -0,8; \quad x = -1,0. \end{aligned}$$

Нанесены также кривые:

$$p = \text{const.}$$

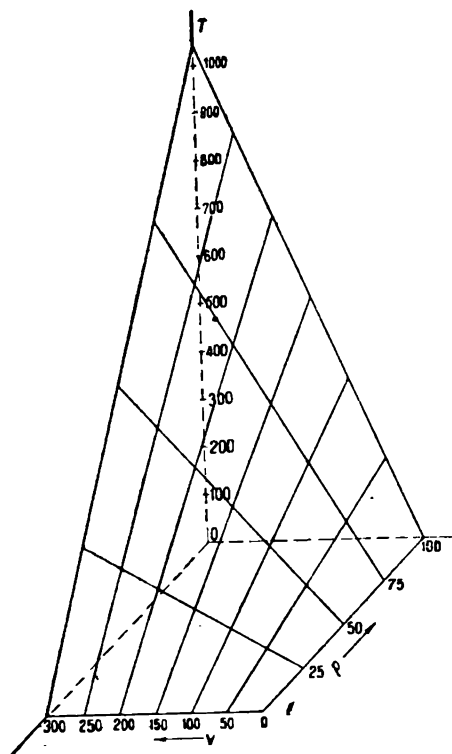
Для указанных значений  $p$  они имеют вид парабол. Полученная диаграмма позволяет решать уравнение для значений  $p$  от 1 до  $+1$  и  $q$  от  $+0,24$  до  $-2$ .

Предоставляем читателю в виде упражнения нанести кривые:

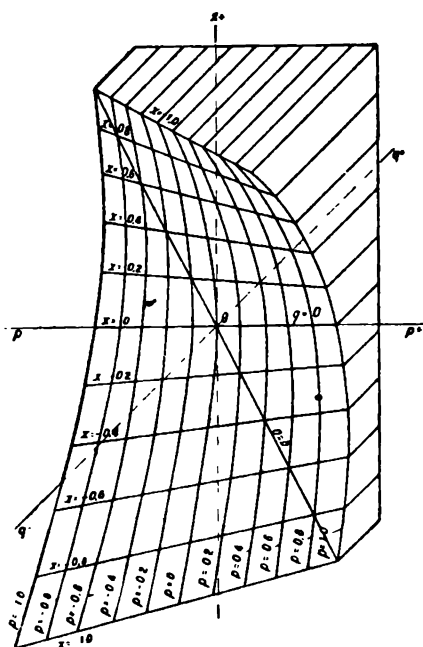
$$q = \text{const.}$$

Для других значений  $p$  и  $q$  можно использовать ту же диаграмму, если положить:

$$p = 10p_1; \quad q = 100q_1; \quad x = 10x_1.$$



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Тогда наше уравнение будет иметь вид:

$$100x_1^2 + 100p_1x_1 + 100q_1 = 0,$$

или

$$x_1^2 + p_1x_1 + q_1 = 0,$$

где  $p_1$  и  $q_1$  найдутся в пределах диаграммы.

4. В справочной книге «Hütte», русское издание 14-е, 1931 г., стр. 308, т. II, помещена таблица веса ременных шкивов в за-

висимости от диаметра  $D$  и ширины  $B$ ; это, следовательно, — таблица с двумя входами. В таблице помещены веса для диаметров от 200 до 2000 мм через каждые 100 мм и от 2000 до 4000 мм через каждые 500 мм и для ширины 75, 100, 125, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600 мм. Для промежуточных значений надо произвести интерполяцию, как было указано. Например, для определения веса шкива диаметром 1240 мм и шириной 320 мм находим из таблицы.

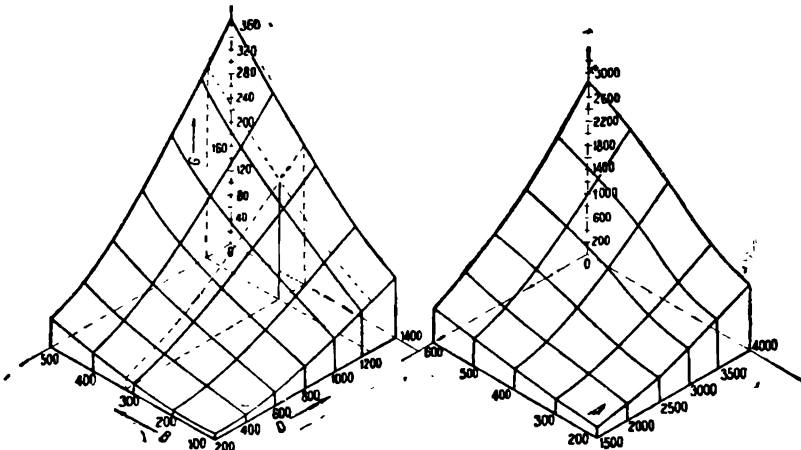
Диаметр 1200 мм, ширина 300 мм, вес 162 кг

» 1300 » » 300 » » 184 »

На каждые 100 мм диаметра вес увеличивается на 22 кг

на 40 » » » »  $\frac{22 \cdot 40}{100}$  кг,

т. е. на 8,8 кг; следовательно, для диаметра 1240 мм и ширины 300 мм получаем вес  $162 + 8,8 = 170,8$  кг.



Фиг. 6.

Подобным же образом находим:

Диаметр 1200 мм, ширина 350 мм, вес 217 кг

» 1300 » » 350 » » 245 »

Диаметр 1240 мм, ширина 350 мм, вес 238 кг

Интерполируем теперь по ширине:

Диаметр 1240 мм, ширина 300 мм, вес 170,8 кг

» 1240 » » 350 » » 238,2 »

Диаметр 1240 мм, ширина 320 мм, вес 197,76 кг

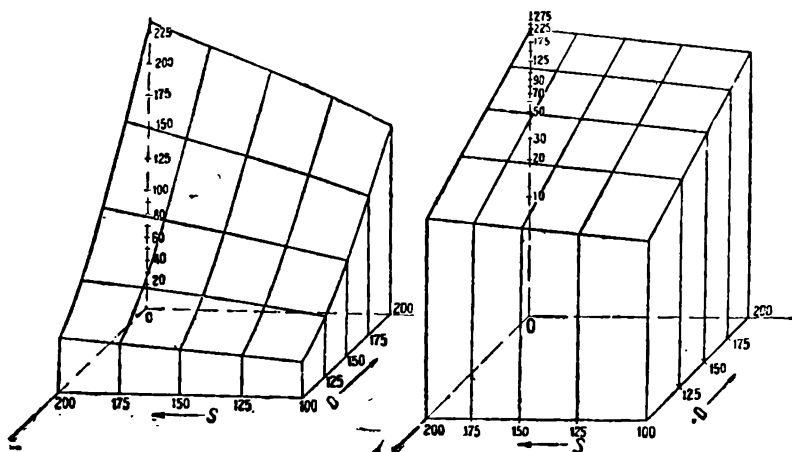
Вместо этого расчета можно по данным таблицы построить диаграмму, что и сделано на фиг. 6, где построена диаграмма для малых шкивов (слева) в более крупном масштабе и для больших

шкихов (справа) в меньшем масштабе. Наш числовой пример находится на левой диаграмме; графическим интерполированием, указанным на чертеже, находим искомый вес 195 кг, что надо считать ближе к действительности, хотя для технических расчетов эта разница не имеет значения.

5. Мощность четырехцилиндрового двигателя ориентировочно может быть подсчитана по формуле:

$$N = 0,00002956 D^{2,4} S^{0,6},$$

где  $N$  — мощность в лошадиных силах,  $D$  — диаметр цилиндров в миллиметрах и  $S$  — ход поршней в миллиметрах. На фиг. 7 слева построена по этой формуле диаграмма, причем вычислены точки



Фиг. 7.

для  $D = 100, 125, 150, 175$  и  $200$  мм и для таких же значений  $S$ . Для вычислений необходимо пользоваться логарифмическими таблицами. Это дает повод к построению диаграммы в логарифмической шкале, а именно принимаем:

$$\lg D = x; \lg S = y; \lg N = z;$$

тогда наша формула примет вид линейной функции:

$$z = -4,5293 + 2,4x + 0,6y,$$

которая легко строится в виде плоскости. Это построение сделано на фиг. 7 справа, причем на осях координат отложены значения  $x, y, z$ , но точки помечены соответствующими значениями  $D, S$  и  $N$ . Для большей точности интерполирования следует нанести более мелкие деления логарифмической шкалы, что можно сделать, пользуясь делениями логарифмической линейки или специальной логарифмической бумагой, имеющейся в продаже. Числовой пример предлагаем читателю проделать самому.

В заключение отметим, что в зависимости от вида функции можно пользоваться и другими неравномерными шкалами помимо логарифмической, например шкалами квадратов, квадратных корней, обратных величин, для которых в справочных книжках можно найти соответствующие таблицы, и др. Останавливаться на примерах подобных шкал мы не будем.

Пространственными диаграммами можно пользоваться также для решения системы уравнений произвольного вида, но это составит предмет следующей статьи.

## ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ КОНИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ, ВПИСАННОГО В ТРЕУГОЛЬНИК

М. П. Черняев (Ростов-на-Дону)

В № 1 журнала «Mathesis» за 1930 г. дано обобщение теоремы Нуайе-Дроз-Фарни (Noyer-Droz-Farny) и Нейберга (Neuber). Автор заметки Гурмагих (R. Goormaghigh), пользуясь взаимно-полярным преобразованием относительно некоторого круга, получает из указанной выше теоремы следующую:

*Дан треугольник ABC, точка M и прямая g, проходящая через точку M; прямые A<sub>1</sub>M, B<sub>1</sub>M и C<sub>1</sub>M, соответственно симметричные с прямыми AM, BM и CM относительно прямой g, пересекут стороны треугольника BC, CA и AB в трех точках, которые будут лежать на одной прямой g<sub>1</sub>; при вращении прямой g вокруг точки M прямая g<sub>1</sub> огибает коническое сечение, вписанное в треугольник ABC.*

Предметом настоящей заметки будет прямое аналитическое доказательство теоремы Гурмагиха.

Отнесем треугольник ABC к прямоугольной декартовой системе координат. За ось абсцисс возьмем сторону AC, а за ось ординат — прямую, перпендикулярную к стороне AC и проходящую через данную точку M. Пусть координаты вершин треугольника ABC будут:

$$A(a, 0), \quad B(m, n) \quad \text{и} \quad C(c, 0).$$

Координаты данной точки M (0,  $\beta$ ). Тогда уравнения сторон треугольника примут вид:

$$\left. \begin{aligned} (AC) \quad & y = 0, \\ (AB) \quad & y = \frac{n}{m-a}(x-a), \\ (BC) \quad & y = \frac{n}{m-c}(x-c). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Уравнения прямых AM, BM и CM:

$$\left. \begin{aligned} (AM) \quad & y = -\frac{\beta}{a}(x-a), \\ (BM) \quad & y = \frac{n-\beta}{m}x + \beta, \\ (CM) \quad & y = -\frac{\beta}{c}(x-c). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$



Уравнения им симметричных прямых  $A_1M$ ,  $B_1M$  и  $C_1M$  относительно прямой  $g$  будут:

$$\left. \begin{aligned} (A_1M) \quad y &= \frac{2ak + \beta(1-k^2)}{(1-k^2)a - 2\beta k} x + \beta, \\ (B_1M) \quad y &= \frac{2mk - (n-\beta)(1-k^2)}{(1-k^2)a + 2k(n-\beta)} x + \beta, \\ (C_1M) \quad y &= \frac{2ck + \beta(1-k^2)}{(1-k^2)c - 2\beta k} x + \beta, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

если уравнение прямой  $g$

$$y = kx + \beta.$$

Найдем координаты точек пересечения  $A_1$  ( $A_1M$  и  $BC$ ),  $B_1$  ( $B_1M$  и  $AC$ ),  $C_1$  ( $C_1M$  и  $AB$ ):

$$\begin{aligned} A_1 & \left\{ \frac{(nc + m\beta - \beta c)(1-k^2)a - 2\beta k}{(1-k^2)(na - \beta m + \beta c) - 2k(a - am - ac)}; \frac{n[\beta(a+c)(1-k^2) + 2k(ac - \beta^2)]}{(1-k^2)(na - \beta m + \beta c) - 2k(n\beta + am - ac)} \right\}; \\ B_1 & \left\{ -\frac{\beta[(1-k^2)m + 2k(n-\beta)]}{2mk - (n-\beta)(1-k^2)}, \quad 0 \right\}; \\ C_1 & \left\{ \frac{(na + m\beta - \beta a)(1-k^2)c - 2\beta k}{(1-k^2)(nc - \beta m + \beta a) - 2k(n\beta + cm - ac)}; \frac{n[\beta(a+c)(1-k^2) + 2k(ac - \beta^2)]}{(1-k^2)(nc - \beta m + \beta a) - 2k(n\beta + cm - ac)} \right\}. \end{aligned}$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} (nc + m\beta - \beta c)[(1-k^2)a - 2\beta k]; & \beta(a+c)(1-k^2) + 2k(ac - \beta^2); & (1-k^2)(na - \beta m + \beta c) - 2k(n\beta + am - ac) \\ -\beta[(1-k^2)m + 2k(n-\beta)]; & 0; & 2mk - (n-\beta)(1-k^2) \\ (na + m\beta - \beta a)[(1-k^2)c - 2\beta k]; & \beta(a+c)(1-k^2) + 2k(ac - \beta^2); & (1-k^2)(nc - \beta m + \beta a) - 2k(n\beta + cm - ac) \end{vmatrix},$$

после того как мы из элементов первой строки вычтем элементы последней строки, примет вид:

$$\begin{vmatrix} -\beta[(1-k^2)m + 2k(n-\beta)]; & 0; & 2mk - (n-\beta)(1-k^2) \\ -\beta[(1-k^2)m + 2k(n-\beta)]; & 0; & 2mk - (n-\beta)(1-k^2) \\ (na + m\beta - \beta a)[(1-k^2)c - 2\beta k]; & \beta(a+c)(1-k^2) + 2k(ac - \beta^2); & (1-k^2)(nc - \beta m + \beta a) - 2k(n\beta + cm - ac) \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, три точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  лежат на одной прямой. Первая часть теоремы Гурмагиха доказана.

Составим уравнение прямой  $A_1B_1$

$$\begin{vmatrix} x; & y; & 1 \\ (nc + m\beta - \beta c)[(1-k^2)a - 2\beta k]; & n[\beta(a+c)(1-k^2) + 2k(ac - \beta^2)]; & (1-k^2)(na - \beta m + \beta c) - 2k(n\beta + am - ac) \\ -\beta[(1-k^2)m + 2k(n-\beta)]; & 0; & 2mk - (n-\beta)(1-k^2) \end{vmatrix} = 0.$$

В раскрытом виде это уравнение прямой может быть записано так:

$$(1-k^2)^2 A + 2k(1-k^2) B + Ck^2 = 0, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} A &= n\beta(a+c)(n-\beta)x - y[\beta m(na - \beta m + \beta c) - \\ &\quad - a(n-\beta)(nc + m\beta - \beta c)] + \beta^2 mn(a+c); \end{aligned}$$

$$B = nx[m\beta(a+c) - (n-\beta)(ac - \beta^2) - y[(nc + m\beta - \beta c)(ma + \beta n - \beta^2) + \beta(n-\beta)(na - \beta m + \beta c) - \beta^2 m(n\beta + am - ac)] + \beta n[\beta(a+c)(n-\beta) + m(ac - \beta^2)];$$

$$C = 4 \{ mn(ac - \beta^2)x + y[m\beta(nc + m\beta - \beta c) + \beta(n-\beta)(n\beta + am - ac)] + \beta n(n-\beta)(ac - \beta^2) \}.$$

Уравнение (4) можно переписать так:

$$\left(\frac{1}{k} - k\right)^2 A + 2\left(\frac{1}{k} - k\right)B + C = 0. \quad (4')$$

Последнее уравнение представляет семейство прямых, зависящее от одного параметра  $\frac{1-k^2}{k}$ ; найдем огибающую этого семейства:

$$2\left(\frac{1-k^2}{k}\right)A + 2B = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{k} - k = -\frac{B}{A};$$

внося полученное значение параметра в уравнение (4'), получим уравнение искомой огибающей:

$$AC - B^2 = 0. \quad (5)$$

Итак, прямая  $g_1$  огибает некоторое коническое сечение. Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} a+c &= \lambda, \\ n-\beta &= \mu, \\ na-\beta m+\beta c &= \nu, \\ nc+\beta m-\beta c &= t, \\ ac-\beta^2 &= u, \\ n\beta+am-ac &= v. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} A &= \beta^2 mn\lambda - y(\beta m\nu - a\mu t) - n\beta\lambda\mu x; \\ B &= n(m\beta\lambda - \mu u)x - y(mat + \beta\mu t + \beta\mu\nu - \beta^2 m\nu) + \beta n(\beta\lambda\mu + tu); \\ C &= 4[\beta\mu\nu + (m\beta t + \beta\mu\nu)y + mnux]. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Абсциссы точек пересечения конического сечения (5) со стороной (AC) определяются из уравнения:

$$[(m\beta\lambda - \mu u)x + \beta(\beta\lambda\mu + tu)]^2 - 4\beta\lambda u(\beta m - \mu x)(\beta\mu + tx) = 0. \quad (8)$$

Последнее уравнение можно преобразовать к виду:

$$[(m\beta\lambda + \mu u)x + \beta(\beta\lambda\mu - tu)]^2 = 0. \quad (8')$$

Следовательно, сторона (AC) касается конического сечения (5). Так как за ось абсцисс можно было выбрать любую из сторон треугольника ABC, то можно считать доказанным, что коническое сечение (5) касается всех трех сторон треугольника ABC.

Теорема Гурмагиха доказана.

## ИЗОБРАЗИТЕЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ В ПРЕПОДАВАНИИ АНАЛИЗА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

Н. Ф. Четверухин (Москва)

Преподавание математического анализа с самых первых шагов встречает трудности методологического и методического характера. Это хорошо известно специалистам-педагогам и немало усилий положено ими, чтобы добиться удовлетворительного разрешения вопроса, огромное значение которого в деле подготовки новых кадров совершенно очевидно. Однако сделанного в этом направлении еще далеко недостаточно. Об этом можно судить и по результатам работы со студентами, и по дискуссиям, проведенным Технико-теоретическим издательством, и по тревожным сигналам, то и дело появляющимся в печати. Укажем, например, на статью С. А. Яновской под заглавием: «Проблема учебника по математике для вузов еще не решена» («Книга и пролетарская революция», 1932 г., № 8—9).

В настоящей заметке мы остановимся лишь на одной из сторон этого чрезвычайно сложного вопроса о преподавании анализа бесконечно малых. Речь идет о тех особо неблагоприятных условиях, в которых находится этот предмет в смысле применения изобразительных моментов, введения элементов наглядности в его преподавание. Общеизвестно, что различные изобразительные приемы (графики, диаграммы, чертежи, рисунки, схемы и т. п.) играют значительную роль в педагогическом процессе и широко применяются в любой научной области. В математике, в частности в геометрии, значение чертежа особенно велико. Важная задача развития пространственного воображения также связана с изобразительными средствами преподавания. Но и другие области математики пользуются изобразительными приемами. Применяются они обыкновенно и в преподавании математического анализа. Однако эти чертежи, успешно выполнявшие свою задачу в области элементарной математики, оказываются в значительной степени непригодными для разрешения тех вопросов, которые ставит перед нами анализ бесконечно малых. Выяснить причины этого совершенно необходимо, коль скоро мы пытаемся наметить правильные пути применения изобразительных методов в анализе бесконечно малых. Необходимо вскрыть то новое, что пришло в математику с изобретением аналитической геометрии и анализа бесконечно малых. В краткой статье

мы не намереваемся дать подробное математическое рассмотрение этого вопроса и лишь попытаемся сжато охарактеризовать те моменты, которые отличают анализ бесконечно малых от элементарной математики, являющейся в своей значительной части созданием древних.

«Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина*», говорит Энгельс в «Диалектике природы» (стр. 63), и далее: «Благодаря этому в математику вошли *движение* и *диалектика* и благодаря этому же *стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*, зачатки которого вскоре были заложены и которое было в целом завершено, а не открыто Ньютоном и Лейбницем»<sup>1)</sup>.

О значении диалектики в этом новом методе Энгельс говорит следующее: «Элементарная математика, математика постоянных величин, по крайней мере, в целом и общем, движется в границах формальной логики, математика переменных величин, существеннейший отдел которой составляет исчисление бесконечно малых, есть в сущности не что иное, как применение диалектики к математическим отношениям».

О недостаточности формальной логики для понимания идей анализа бесконечно малых Энгельс говорит во многих местах «Анти-Дюринга». Мы приведем еще следующую выдержку из этой книги, интересную также и с методической стороны: «Но дифференциальное исчисление, несмотря на все протесты здравого человеческого рассудка, приравнивает при известных условиях прямое кривому и достигает благодаря этому успехов...»

Итак, изучение переменных величин, функциональных связей, процессов изменения — вот новый момент, отличающий метод анализа бесконечно малых от элементарной математики. Несомненно, что преподавание принципиальных положений дифференциального исчисления, вызывающих «протесты здравого человеческого рассудка», представляет особые трудности. Ниже мы остановимся подробнее на одном из примеров обычно употребляемого в дифференциальном исчислении чертежа, который вызывает у учащихся впечатление, обратное тому, какое старается внушить им преподаватель. Неподвижный статический чертеж, изображающий лишь отдельные моменты, фазы или состояния, не может передать сущность переменных процессов, изучаемых в анализе бесконечно малых, и их качественные особенности. «Лишь дифференциальное исчисление дает естествознанию возможность изобразить математические процессы, а не только состояния»<sup>2)</sup>. Наши изобразительные средства, обычно применяемые в преподавании анализа бесконечно малых, благодаря своей статичности, неподвижности, непригодны для этой цели. Они должны быть перестроены в том направлении, чтобы они помогали учащимся следить за развитием переменного процесса, представить в наглядной форме его закономерности, глубже проникнуть в самую его сущность. Быть может, для этой цели наиболее при-

<sup>1)</sup> Подчеркнуто Энгельсом.

<sup>2)</sup> Энгельс, Заметки, 1881—1882 гг.

годным окажется кино или другие изобразительные средства. В этой заметке излагаются лишь первые попытки обновить изобразительные приемы в преподавании анализа бесконечно малых.

Рассмотрим более подробно один из типичных чертежей, применяющихся в дифференциальном исчислении. Этим чертежом иллюстрируется изучение дифференциала и выясняется геометрическое значение последнего (фиг. 1).

Пусть  $MM'$  — график функции  $y = f(x)$ .

Если  $AA' = \Delta x$  — приращение независимого переменного, то  $CM' = \Delta y$  — приращение функции. Построим касательную  $MD$  в точке  $M$ . Тогда отрезок  $CD = dy$  — дифференциал функции.

Далее, имеем:

$$CM' = CD + DM',$$

или

$$\Delta y = dy + \alpha.$$

Одновременно учащемуся объясняют, что дифференциал  $dy$  есть главная часть бесконечно малого приращения  $\Delta y$ , а член  $\alpha$  есть бесконечно малая высшего порядка. На этом основано применение дифференциала  $dy$  (взамен прираще-

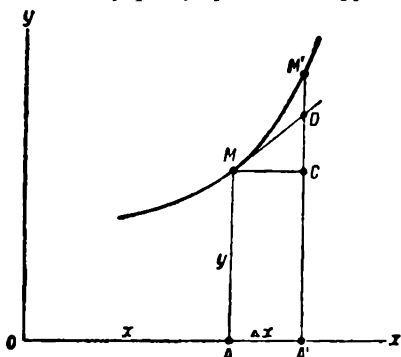
ния  $\Delta y$ ) в практических вычислениях, причем член  $\alpha$  отбрасывается.

Учащийся же видит на чертеже совсем другое. Он видит, что отношение  $\frac{\alpha}{dy} = \frac{DM'}{CD}$  конечно, и пренебрежение слагаемым  $\alpha$  поэтому представляется ему непонятным, неверным и недопустимым в такой дисциплине, как математика.

Чертеж показывает, что  $\alpha$  может оказаться даже и больше  $dy$ . Все это вызывает у учащегося протест против действий преподавателя и недоверие к строгости его рассуждений.

Ниже в таблицах чертежей, которые описываются в настоящей статье, мы снова возвратимся к рассматриваемому примеру. Пока же нашей целью было лишь обнаружить отставание изобразительных средств, применяемых в анализе бесконечно малых, и их несоответствие основному принципу этой дисциплины.

Причина непригодности фиг. 1 ясна: этот чертеж неподвижен, он передает лишь одно состояние, один момент процесса. Поэтому самым простым средством для его исправления было бы изображение последующих стадий процесса на том же чертеже. Однако это встречает технические затруднения. По мере течения процесса при убывающем  $\Delta x$  размеры деталей чертежа делаются все меньше и меньше, а рассматривание и выполнение их — все затруднительнее. Таким образом выигрыш в одном отношении сопровождается проигрышем в другом. Естественно возникает мысль о постепенном увеличении рисунков, в то время как интервал  $\Delta x$  убывает с течением процесса. Однако здесь обнаруживаются другие труд-



Фиг. 1.

ности, заключающиеся в том, что для каждой стадии процесса приходится иметь дело с новой фигурой (например дугой данной линии), которая уже не может быть изображена произвольно, как начальный рисунок, а, наоборот, она вполне определяется начальным рисунком и стадией процесса. Так как, однако, для нас безразлично, какая именно кривая послужила для составления чертежа, то можно воспользоваться для этой цели дугой окружности<sup>1)</sup>. Тогда вычерчивание последовательных фаз или стадий процесса значительно упрощается.

Пусть, например,  $M$  — точка дуги окружности радиуса  $R$ . Опишем из  $M$ , как из центра, круг радиуса  $r$ . Часть плоскости, ограниченную этим кругом, будем называть *полем зрения*. Задача состоит в том, чтобы рассмотреть *переменное поле зрения* при  $r \rightarrow 0$ . Предположим, что убывание  $r$  происходит по какому-либо определенному закону, например в геометрической прогрессии. Получим последовательность:

$$r_1, \quad r_2 = \frac{r_1}{n}, \quad r_3 = \frac{r_2}{n}, \quad \dots,$$

так как при переходе к новым стадиям радиус поля зрения уменьшается в  $n$  раз, то одновременно должно быть произведено увеличение чертежа путем применения к нему подобного преобразования с таким коэффициентом подобия, чтобы поле зрения не изменило своих размеров (т. е. увеличение в  $n$  раз). Практически это можно представить себе следующим образом. Предположим, что круговое поле зрения получено на экране с помощью проекционного фонаря. Если диафрагма в объективе фонаря будет постепенно уменьшаться, захватывая все меньшую часть рисунка, а экран соответствующим образом удаляется от фонаря (подобное увеличение изображения), то на экране все время будем иметь *круговое поле зрения постоянного радиуса с изменяющимся в нем рисунком*. Этим достигается: 1) возможность одинаково хорошего рассматривания чертежа в любой стадии процесса и 2) возможность обнаружить его качественные особенности, причем различие в размерах последовательных полей зрения устраняется.

Переходя к самому построению поля зрения, отметим, что находящаяся в нем фигура (дуга окружности радиуса  $R$ ) может быть охарактеризована отношением  $\frac{R}{r}$ , которое не меняется при подобном преобразовании. Предположим, что в первой стадии мы имеем:  $\frac{R}{r_1}$ . Тогда для второй стадии получаем:

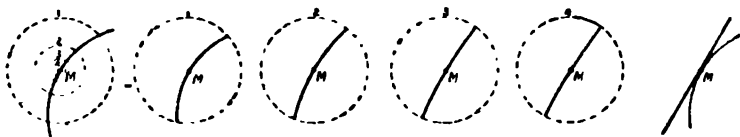
$$\frac{R}{r_2} = \frac{R}{r_1} = \frac{R \cdot n}{\frac{r_1}{n}};$$

следовательно, фигура второй стадии может быть получена иным способом, а именно, оставляя неизменным поле зрения ( $r_1$ ) и уве-

<sup>1)</sup> Если же требуется построить последовательные увеличения какой-либо кривой, заданной графически (т. е. начерченной), то это можно сделать с помощью пантографа.

личивая радиус дуги окружности ( $R$ ) в  $n$  раз. По этому принципу и были построены фигуры последовательных стадий чертежа, имеющиеся на прилагаемых таблицах. Переходим теперь к описанию таблиц.

Таблица I. Направление кривой в данной ее точке ( $M$ ).



Первая фигура этой таблицы дает натуральную схему процесса построения полей зрения. Пусть  $M$  — произвольная точка кривой<sup>1)</sup> (дуги окружности радиуса  $R$ ). Около  $M$ , как центра, описываем последовательность кругов<sup>2)</sup>, радиусы которых убывают в отношении 2:1. Это — последовательные поля зрения в натуре (без увеличения). На табл. I их имеется четыре с номерами 1, 2, 3 и 4. Следующие фигуры табл. I представляют последовательность тех же полей зрения, причем к каждому из них применено соответствующее увеличение, уравнивающее все поля зрения. Таким образом поле 1 дается в натуральную величину, поле 2 — с увеличением в 2 раза, поле 3 — в 4 раза, поле 4 — в 8 раз и т. д.

Согласно указанному выше принципу рисунки этих полей могут быть получены увеличением радиуса  $R$  изображаемой дуги окружности соответственно в 1, 2, 4, 8, ... раз при постоянстве самих полей зрения<sup>3)</sup>.

На таблице лента последовательных полей зрения обрывается на четвертом звене. Теоретически она бесконечна.

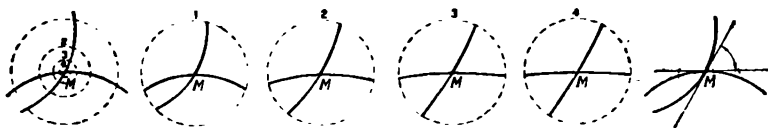
Однако уже первые четыре фигуры позволяют судить о характере происходящего процесса: постепенное выпрямление дуги кривой (окружности). Для сравнения справа показано предельное положение (направление касательной, к которому приближается дуга кривой окружности) по мере развития процесса. Таблица должна помочь учащемуся осознать то основное положение дифференциального исчисления, как «в известных условиях прямое может быть приравнено кривому» (ср. с цитатой на стр. 59), т. е. как с развитием процесса такая аппроксимация делается все более возможной и точной. Вместе с тем таблица обнаруживает несводимость кривой к прямой (бесконечность ленты) и объясняет происхождение понятия *направления кривой* от понятия *направления прямой*.

<sup>1)</sup> Вычерчена сплошной линией.

<sup>2)</sup> Вычерчены пунктиром.

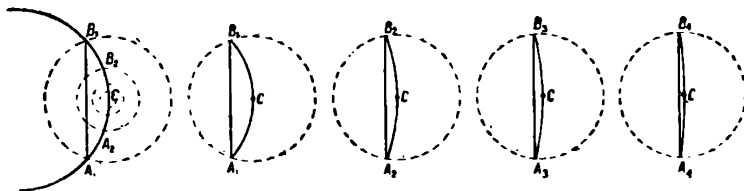
<sup>3)</sup> Вычерчивание дуг кругов больших радиусов производится с помощью штанген-циркуля, а при дальнейшем увеличении — с помощью особого прибора (линейки Федорова).

Таблица II. Угол, образованный двумя пересекающимися кривыми



Обозначая точку пересечения кривых буквой  $M$ , строим, как и в предшествующем случае, последовательность концентрических полей зрения (1, 2, 3, 4). Первая фигура дает общую схему полей зрения в оригинале (без увеличения). Затем из них образуется лента, принципы построения отдельных звеньев которой те же самые, что и на табл. I. Двигаясь по ленте слева направо, можем наблюдать постепенное выпрямление обеих кривых (дуг окружностей) и приближение криволинейного угла к прямолинейному, который на фиг. 4 уже можно оценить примерно в  $60^\circ$ . Для сравнения справа дается угол, образованный касательными к данным кривым в точке их прикосновения.

Таблица III. Эквивалентность дуги и хорды



Эта таблица помогает учащимся выяснить одно из основных положений анализа бесконечно малых, заключающееся в том, что отношение длины дуги кривой к длине стягивающей ее хорды стремится к единице при неограниченном их уменьшении. Следовательно,

$$\frac{\widehat{AB}}{AB} \rightarrow 1, \quad (\text{при } \widehat{AB} \rightarrow 0)$$

в частности

$$\frac{2x}{2 \sin x} \rightarrow 1. \quad (\text{при } x \rightarrow 0)$$

Поля зрения строятся около точки  $C$ , как центра. Лента полей позволяет видеть, как отношения

$$\frac{\widehat{A_1B_1}}{A_1B_1}, \quad \frac{\widehat{A_2B_2}}{A_2B_2}, \quad \frac{\widehat{A_3B_3}}{A_3B_3}, \quad \dots$$

приближаются к единице.



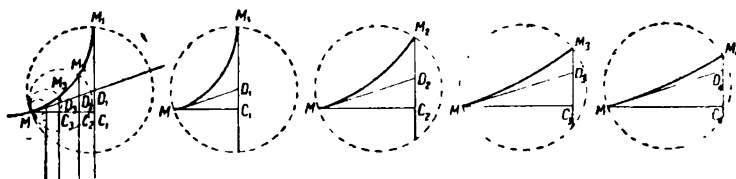
Так как кривой в поле зрения табл. III является фактически дуга окружности, то можем положить:

$$\widehat{AB} = 2x_i; \quad \overline{AB} = 2 \sin x_i$$

(причем радиус  $R$  принимается за единицу). Тогда будем иметь:

$$\frac{2x_i}{2\sin x_i} = \frac{x_i}{\sin x_i} \rightarrow 1 \quad (\text{при } i \rightarrow \infty \text{ и } x_i \rightarrow 0).$$

Таблица IV. Дифференциал как главная часть бесконечно малого приращения



Как и в предыдущих случаях, кривая в поле зрения — дуга окружности. В точке  $M$  этой дуги проведена касательная. Центры круговых полей зрения, в отличие от предыдущих таблиц, здесь не совпадают, они расположены на касательной так, что все круги проходят через  $M$  и переменную точку  $M_i$ . Радиусы пунктирных кругов (полей зрения) образуют, как и прежде, геометрическую прогрессию:

$$r_2 = \frac{r_1}{2}; \quad r_3 = \frac{r_2}{2}, \dots$$

В остальном построение ленты полей зрения не отличается от предыдущих случаев. Через точку  $M$  проводим прямую  $MC_1$ , параллельную оси  $OX$  (не изображена). Направление оси  $OY$  перпендикулярно  $OX$ . Приращение  $\Delta x$  будет в различных стадиях процесса изображаться отрезками  $MC_1, MC_2, MC_3, MC_4, \dots$ . Соответствующее приращение  $\Delta y$  изобразится последовательностью отрезков:  $C_1M_1, C_2M_2, C_3M_3, C_4M_4, \dots$ . Дифференциал  $dy$  изобразится последовательностью отрезков:  $C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3, C_4D_4, \dots$

Пробегая ленту слева направо, видим, как повышается значение главной части ( $dy$ ) в приращении  $\Delta y$ , в то время как разность ( $\alpha_i = D_iM_i$ ) стремится к нулю<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Интересно отметить на этом чертеже, что бесконечно малые 1-го порядка изобразятся отрезками конечными и изменяющимися в некоторых границах, в то время как бесконечно малые 2-го и высших порядков изображаются отрезками, стремящимися к нулю.

Таблица V. Элемент площади в полярных координатах

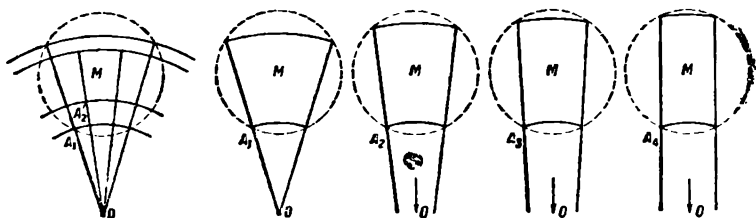


Таблица должна показать, что в процессе уменьшения элемент площади (в полярных координатах), ограниченной двумя радиусами-векторами и двумя концентрическими кругами, стремится принять прямоугольную форму. Поля зрения в оригинале образуются концентрическими кругами (пунктирными), описанными из точки  $M$ . Для построения элемента площади в различных стадиях процесса проводим из  $M$  прямую  $MA$ , которая пересекает пунктирные круги в точках  $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ . Проводя через эти точки из полюса  $O$  радиусы-векторы, а также концентрические круги, построим элемент площади в каждом поле зрения. На первой фигуре табл. V сделано два таких построения. Лента последовательных полей зрения позволяет видеть, как криволинейный четырехугольник, ограничивающий элемент площади, приближается по мере развития процесса к прямоугольной форме. Благодаря этому формула  $dS = \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho$ , в правой части которой мы имеем произведение основания ( $\rho \cdot d\varphi$ ) на высоту ( $d\rho$ ) прямоугольника, становится наглядной.

# ТЕКУЩАЯ ЖИЗНЬ

## КРУПНЫЙ УСПЕХ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

Молодой советский математик, профессор Московского университета А. О. Гельфонд, доложил на заседании Московского математического общества о своих работах в области теории трансцендентных чисел.

Алгебраическим числом называется число  $\alpha$ , которое является корнем алгебраического уравнения

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$$

с целыми коэффициентами  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ . Числа, которые не могут быть корнями таких уравнений, называются трансцендентными.

Существование трансцендентных чисел было обнаружено известным французским математиком Лиувиллем почти сто лет назад. Лиувиль же доказал некоторые важные свойства этих чисел. Значительно позже Эрмит доказал, что основание  $e$  натуральных логарифмов есть число трансцендентное. Пользуясь методом Эрмита, Линдеман доказал трансцендентность числа  $\pi$ .

В 1900 г. на Международном математическом съезде Д. Гильберт, крупнейший современный математик, поставил целый ряд весьма трудных математических задач, работа над которыми должна развивать методы современной математики. Седьмая из этих задач была следующей:

Доказать, что числа вида  $\alpha^\beta$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — алгебраические числа (а  $\beta$  — число иррациональное), суть числа трансцендентные (например  $2\sqrt{2}$ ,  $3\sqrt[3]{2}$  и т. п.).

В течение почти тридцати лет никаких подходов к решению этой задачи не было, и она считалась почти неразрешимой по трудности.

В 1929 г. А. О. Гельфонд впервые разрешил проблему Гильберта для частного случая. Именно, он доказал, что если  $\alpha$  — чисто алгебраическое, а показатель  $\beta$  имеет вид  $i\sqrt[n]{a}$  ( $a$  — число рациональное,  $i$  — мнимая единица), то  $\alpha^\beta$  есть число трансцендентное. Развивая метод Гельфонда, Р. Д. Кузьмин и немецкий математик

Зигель (Siegel) доказали трансцендентность чисел вида  $\alpha^\beta$ , где  $\alpha$  — алгебраическое, а  $\beta = \sqrt{a}$ , где  $a$  — число рациональное.

Но проблема Гильберта полностью оставалась неразрешенной.

В последней своей работе А. О. Гельфонд дал полное решение проблемы Гильберта. Всякое число вида  $\alpha^\beta$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — алгебраические,  $\beta$  — иррационально, есть число трансцендентное. Решение было дано на основании нового метода, созданного А. О. Гельфондом.

# ЗАДАЧИ и СМЕСЬ

## ЗАДАЧИ

26. Если остаток от деления некоторого числа на 9 есть одно из чисел 2, 3, 5, 6, 8, то это число не может быть полным квадратом.

27. Если  $A$  — целое число, то сумма  $\frac{A}{6} + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3}$  есть также целое число.

28. Если  $N$  и  $N'$  — целые числа, и сумма  $N^2 + N'^2$  делится на 7, то каждое из чисел  $N$  и  $N'$  в отдельности делится на 7.

29. Найти четыре числа, образующих пропорцию, если известно, что сумма крайних членов 14, сумма средних членов 11, а сумма квадратов этих четырех чисел 221.

30. Решить неравенство:

$$\frac{(x+a)^2}{x^2+a^2} > \frac{(x+b)^2}{x^2+b^2}.$$

31. Внутренняя и внешняя общие касательные к двум окружностям равны  $a$  и  $b$ . Определить длину общей касательной после того как окружности сближены до соприкосновения.

Е. Б. Каган (Москва)

32. Если три диагонали вписанного шестиугольника служат диаметрами описанного круга, то площадь этого шестиугольника равна удвоенной площади треугольника, имеющего своими сторонами какие-нибудь три из остальных диагоналей этого шестиугольника.

Н. Колмогоров (Капланбек)

33. Доказать, что для всякого треугольника

$$Ra\sqrt{4R^2-a^2} + Rb\sqrt{4R^2-b^2} + Rc\sqrt{4R^2-c^2} = abc,$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — стороны треугольника, а  $R$  — радиус описанного круга.

Н. Колмогоров (Капланбек)

34. Трехгранная пирамида имеет прямой трехгранный угол при вершине  $O$ , причем

$$OA = OB = 12 \text{ см},$$

$$OC = x.$$

Вычислить  $x$  при условии, что радиус сферы, вписанной в тетраэдр  $OABC$ , равен 3 см.

Вычислить при этом же условии площадь треугольника  $ABC$  и расстояние от точки  $O$  до плоскости  $ABC$ .

35. Решить уравнение:

$$\sin x = \cos \frac{1}{x}.$$

36. Из системы уравнений:

$$k^2 (y^2 + z^2) (x^2 + y^2) = y^2 z^2,$$

$$l^2 (z^2 + x^2) (y^2 + z^2) = z^2 x^2,$$

$$m^2 (x^2 + y^2) (z^2 + x^2) = x^2 y^2,$$

определить зависимость между  $k$ ,  $l$  и  $m$ .

Н. Колмогоров (Капланбек)

37. Решить систему:

$$(a_1 x_1 + b_1 x_2 + \dots + m_1 x_n) (x_1 + x_2 + \dots + x_n)' = A_1,$$

$$(a_2 x_1 + b_2 x_2 + \dots + m_2 x_n) (x_1 + x_2 + \dots + x_n)' = A_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(a_n x_1 + b_n x_2 + \dots + m_n x_n) (x_1 + x_2 + \dots + x_n)' = A_n,$$

если

$$\Sigma a_k = \Sigma b_k = \dots = \Sigma m_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Н. Агрономов

38. Найти корни уравнения:

$$[(ax - b) - (ax - b)! + 1]! + (ax - b)! = (ax - b) + 1.$$

А. В. (Москва)

39. Решить в целых числах уравнение:

$$2^x + 1 = y^2.$$

40. Доказать, что если в треугольнике имеет место соотношение:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1,$$

то он прямоугольный.

41. Найти

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}},$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)^2}{1 + \cos \pi x}.$$

42. Найти производные от следующих функций:

$$a) y = (\sin x)^{\frac{1}{x}},$$

$$b) y = \arctg \frac{x+a}{1-ax},$$

$$c) y = \ln (\cos x + i \sin x).$$

43. Вычислить интегралы:

$$a) \int \frac{dx}{\sin x - \sin a},$$

$$b) \int \sqrt{\frac{dx}{x-x^2}},$$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx:$$

44. Исследовать сходимость ряда:

$$1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} + \dots$$

45. Найти предел произведения

$$\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \cos \frac{x}{2^3} \dots \cos \frac{x}{2^n}$$

при неограниченном возрастании  $n$ .

46. Найти плоскую кривую, нормали к которой проходят через заданную точку.

47. Определить полином  $f(x)$  5-й степени, который удовлетворяет тождеству:

$$5f(x) \equiv (x-1)f'(x) + x^3 - 2x + 3$$

и который равен нулю при  $x=2$ .

48. Показать, что полином

$$x^{pa} + x^{pb+1} + x^{pc+2} + \dots + x^{pl+p-1}$$

делится на

$$x^{p-1} + x^{p-2} + x^{p-3} + \dots + x + 1,$$

если  $p, a, b, c, \dots, l$  — целые числа.

49. Исследовать кривую:

$$y = x^y,$$

в частности для отрицательных значений  $y$ .

50. Вывести уравнение шара, проходящего через окружность пересечения данного шара, радиус которого  $R$ , с плоскостью  $Ax + By + Cz + D = 0$  и через начало координат.

О р л и ц к и й (Катовицы, Польша)

# УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

Задачи, предлагавшиеся на приемных испытаниях в Московском нефтяном институте в 1933 г.

1. Вычислить численную величину алгебраического выражения:

$$a^3 - b^2 : (b - c), \text{ при } a = -\frac{1}{2}; b = -0,09; c = +0,18.$$

2. Произвести указанные действия:

$$\frac{x}{x+3} + \frac{1}{3-x} - \frac{x^2 - 3x - 6}{x^2 - 9}.$$

3. Найти значение  $x$ , если

$$1) x = \lg_3 \frac{1}{9}; 2) x = \lg_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}; 3) \lg x = \frac{1}{4} \lg 6 - \frac{1}{2} \lg 3.$$

4. Доказать тождество:

$$\frac{\cos 2x + \sin^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \cos^2 x (1 - \sin x) (1 + \sin x).$$

5. Решить уравнение:

$$4^{x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}} = \sqrt{2}.$$

6. Вычислить с помощью таблиц логарифмов  $x$ , если

$$x = \sqrt{\frac{0,9 \sin 48^\circ 27' 40''}{0,323}}.$$

7. Определить, сколько градусов, минут и секунд содержит дуга, равная 2 радианам.

8. Определить  $x$  с помощью таблиц логарифмов, если

$$x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2}.$$

9. В конус вписана правильная четырехгранная пирамида. Зная, что боковая поверхность конуса равна  $S$ , а угол осевого сечения при вершине  $\alpha$ , определить объем пирамиды.

10. Решить систему уравнений:

$$x^2 + y^2 = 65, xy = 28.$$

11. Куб с ребром равным  $a$  вращается около одного из своих ребер. Определить объем тела вращения.

12. Освободить дробь от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{x(1 - \sqrt{x^2 - 4})}{2 + \sqrt{4 - x^2}}.$$

13. Написать определение призмы.

14. Зная, что  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ , найти без таблиц  $\operatorname{tg} 15^\circ$ .

15. Можно ли вписать в окружность прямоугольник? ромб? трапецию? Доказать.



16.  $\sin x = \frac{3}{8}$ ; найти  $\sin \frac{x}{2}$ ,  $\cos \frac{x}{2}$ ,  $\sin 2x$ ,  $\cos 2x$ .

17. Привести к виду, удобному для логарифмирования:

$$\cos 18^\circ + \cos 42^\circ,$$

$$\sin 15^\circ + \sin 27^\circ.$$

18. Вычислить без помощи таблицы  $\sin 75^\circ$  и  $\cos 75^\circ$ , зная, что  $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , а  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ .

19. Вычислить  $\lg(x + \beta)$ , если  $\lg x = \frac{1}{2}$ ,  $\lg \beta = \frac{1}{3}$  и найти угол  $(x + \beta)$ .

20. Написать разложение:  $(x + a)^7$ .

21. Найти арифметическую прогрессию, зная, что сумма семи первых членов равна 147, а произведение первого на седьмой равно 297.

22. Доказать тождество:

$$\frac{1 + \operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg}^2 x.$$

23. В треугольнике  $ABC$  сторона  $AB = 21$  см,  $BC = 20$  см и  $AC = 13$  см. Из вершины  $C$  восставлен перпендикуляр  $CD = 9$  см к плоскости этого треугольника. Определить расстояние точки  $D$  от стороны  $AB$  треугольника.

24. Решить уравнение:  $\sin x + \operatorname{ctg} x = 3$ .

25. Найти геометрическую прогрессию, состоящую из четырех членов, если сумма крайних равна 1085, а сумма средних равна 210.

26. Доказать тождество:

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} \beta}.$$

27. Решить уравнение:

$$x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + a^2 - b^2 = 0.$$

28. Из вершины  $C$  треугольника  $ABC$  восставлен к плоскости треугольника перпендикуляр  $CD$ , равный 5 см. Определить расстояние точки  $D$  этого перпендикуляра от стороны  $AB$ , если  $AB = 14$  см,  $BC = 13$  см,  $AC = 15$  см.

29. Решить уравнение:

$$x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = (0,3)^{-1}.$$

# Б И Б Л И О Г Р А Ф И Я

А. Киселев. Алгебра. Учебник для средней школы, ч. II, 8 и 9-й годы обучения. Изд. 11-е, исправленное под редакцией А. Н. Барсукова, М. 1934. Ц. 1 р. 35 к., пер. 60 коп.

Рассматриваемая книга представляет собою вторую часть учебника того же автора, утвержденного коллегией Наркомпроса РСФСР в качестве стабильного руководства по алгебре для средней школы. Она содержит теоретический материал, соответствующий программе алгебры 8 и 9-го годов обучения, а также около 300 примеров для упражнения учащихся.

Полобно первой части того же руководства и рассматриваемая вторая часть представляет собою переработку «Элементарной алгебры» того же автора, которая в течение нескольких десятилетий служила учебником алгебры в средних учебных заведениях России. Переработка не одинаково коснулась различных частей курса, и это отразилось на объеме излагаемых статей: в то время как изложение первых статей отличается крайней сжатостью и даже конспективностью, статьи, излагаемые в конце книги, излагаются более растянуто и подробно, а последняя глава — о непрерывных дробях, вошедшая из прежних изданий без изменения, оказывается одной из самых больших по объему, хотя она представляет значительно меньшую важность, чем другие статьи курса, и даже не включена в программу. Характер переработки книги из старых изданий отразился и на методе изложения, который не одинаков в разных частях; так, в нескольких случаях, например в главах об иррациональных уравнениях и о прогрессиях, автор подходит к трактуемым вопросам индуктивным методом, от задач, в других же случаях — чисто догматически. В общем, учебником можно пользоваться при прохождении курса алгебры, но нельзя не отметить крайней сухости изложения, которое не может заинтересовать учащихся и возбудить любовь к математике. В книге нет даже и такого небольшого числа исторических справок, какое было дано в первой части, отсутствуют примеры из области других наук — физики, механики и пр., а также из области техники и т. п.

Отметим некоторые промахи в изложении. В статье о действиях над иррациональными выражениями о том, что речь идет о корнях арифметических, (стр. 13), упомянуто в примечании, хотя это условие является важнейшим основанием для вывода всех правил и уже было упомянуто в начале предыдущего параграфа. Но тут же говорится, что «если корень четной степени предполагается алгебраический, то перед найденным результатом надо поставить двойной знак  $\pm$ ». Однако, когда именно последнее может иметь место, не объяснено и, далее, нигде двух знаков в этом отделе не поставлено. В той же главе в § 20 об освобождении дроби от иррациональности в знаменателе не объяснено, почему можно умножить числителя и знаменателя дроби на иррациональное число, и она при этом не изменяется по величине.

Глава об иррациональных уравнениях помещена после действий над иррациональными выражениями, задолго до квадратных уравнений. Однако решение этих уравнений часто приводится не только к квадратным уравнениям, с которыми учащиеся отчасти знакомы из курса 7-го года обучения, но и к биквадратным, каких они решать не могут. Поэтому нельзя не признать

помещение иррациональных уравнений в указанном месте преждевременным. Здесь же автор на стр. 21 пишет уравнение из трех частей:

$$2x - 4 = 1 + 2\sqrt{x+5} + x + 5 = 6 + 2\sqrt{x+5} + x,$$

что отнюдь не должно быть допускаемо. В этой же статье автор говорит, что после освобождения иррационального уравнения от радикалов может оказаться, что все корни нового уравнения будут посторонними для данного, но не приводит ни одного примера этого наиболее важного случая.

В главе о функциональной зависимости, упомянув о постоянных и переменных величинах, автор говорит, что «постоянные величины можно понимать лишь относительно, в пределах данного вопроса». Между тем учащиеся знают, что (например, число дециметров в метре или секунд в минуте, число  $\pi$ ) некоторые физические константы — величины абсолютно постоянные. Определение функции в той же главе дано в слишком общем виде, и его следовало бы уточнить в смысле определений Эйлера или Дирихле.

В главе о квадратных уравнениях (§ 45) тоже допущена запись трехчленных уравнений; встречаются неточные выражения: «если эти формулы сложим...», тогда как формула не есть величина. Указав ранее, что квадратное уравнение имеет всегда два корня, автор на 51 стр. говорит, что если прямая касается параболы, то уравнение имеет один корень. В § 54 о биквадратных уравнениях говорится: «отсюда видно, что если  $b^2 - 4ac < 0$ , то все 4 корня мнимые». Между тем, это совсем не очевидно, так как об извлечении корня из мнимых количеств говорится много позже, на стр. 128—132, да и там не сказано, что квадратный корень из комплексного количества есть всегда количество комплексное. В той же главе не упомянуто, что при возведении комплексного количества в степень может получиться действительный результат, хотя это имеет важное значение.

В главе о прогрессиях, автор в § 81 для сравнения арифметической и геометрической прогрессий пользуется графическим методом, причем изменение членов арифметической прогрессии изображает прямой линией, а геометрической — какой-то непрерывной кривой, хотя здесь в обоих случаях мы имеем прерывное изменение величин, которое должно быть представлено отдельными точками.

При введении понятия о дробном показателе не упомянуто, что корни здесь имеются в виду исключительно арифметические. На стр. 96 сказано: «при всяком основании (не равном единице) логарифм единицы есть нуль». Между тем, и при всяком основании, не равном нулю, логарифм единицы равен нулю.

Есть недочеты и в отделе о неопределенных уравнениях, например, признаком невозможности решения неопределенного уравнения  $ax + by = c$  в положительных числах указано только, что оно невозможно, когда  $a > 0$ ,  $b > 0$  и  $c < 0$ , но оно невозможно вообще, когда  $a + b > c$ .

Не останавливаясь на некоторых других недочетах изложения материала, отметим, что число задач и упражнений, увеличенное против предыдущего издания, все же еще не может считаться достаточным. Ответы к упражнениям даны далеко не ко всем задачам. В числе задач на арифметическую прогрессию попал вывод важной формулы для суммы членов (задача 127), которая должна быть перенесена в текст. Есть опечатки в условиях задач; например, там же, в задаче 125, дается величина ускорения силы тяжести  $g = 8,9$  м (эта опечатка была и в предыдущем издании).

Несмотря на указанные недочеты, которые легко могут быть исправлены, рассматриваемый учебник можно пользоваться при классном преподавании. Желательно, однако, чтобы наряду с переделкой и приспособлением старых учебников для современной школы развернулась творческая работа по составлению новых руководств и задачников, отвечающих важному делу строительства новой советской школы.

И. И. Чистяков

## СОДЕРЖАНИЕ

### ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

	<i>Стр.</i>
<b>П. И. Сапунов.</b> Некоторые упрощения при решении иррациональных уравнений, содержащих квадратные радикалы . . . . .	3
<b>Н. А. Колмогоров.</b> Вывод некоторых формул тригонометрии . . . .	9
<b>А. Д. Щербаков.</b> Решение треугольников способом выпрямления сторон . . . . .	17
<b>Н. А. Колмогоров.</b> Обобщение теоремы Хузеля . . . . .	19
<b>С. А. Богомоллов.</b> Разбиение выпуклого многоугольника на треугольники с помощью диагоналей . . . . .	21
<b>С. Е. Аршон.</b> Доказательство существования $n$ -значных бесконечных асимметричных последовательностей . . . . .	24

### ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

<b>Д. И. Перепелкин.</b> Геометрическая теория гиперболических функций	34
<b>Н. Г. Чудakov.</b> Элементарное доказательство трансцендентности показательной и тригонометрической функций . . . . .	44
<b>А. С. Кованько.</b> Аналитическое исследование некоторых типов проективных преобразований . . . . .	45
<b>В. В. Добровольский.</b> Пространственные диаграммы . . . . .	47
<b>М. П. Черняев.</b> Об одном свойстве конического сечения, вписанного в треугольник . . . . .	55

### МЕТОДИКА

<b>Н. Ф. Четверухин.</b> Изобразительные моменты в преподавании анализа бесконечно малых . . . . .	58
--	----

### ТЕКУЩАЯ ЖИЗНЬ

<b>Крупный успех современной математики . . . . .</b>	66
---	----

### ЗАДАЧИ И СМЕСЬ

<b>Упражнения для учащихся . . . . .</b>	71
--	----

### БИБЛИОГРАФИЯ

<b>И. И. Чистяков. А. Киселев. Алгебра . . . . .</b>	73
--	----

---

Редакция Р. Н. Бончковского. Оформление О. Н. Персияниновой.  
Корректурa И. П. Загрядскова, Наблюдала за выпуском О. И. Морозова.  
Сдано в производстве 17/VIII 1934 г. Подписано к печати 17/XII 1934 г.  
Печ. листов  $4\frac{3}{4}$ . Формат 62×94. Тираж 5000. Печ. зн. в листе 60000.  
Заказ № 201 ГТТИ № 141. Уполн. Главлита № В—15454.